TD 5 - Turing, le retour

Exercice 1. *Problème de l'Array*

1. Montrer qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est récursive si et seulement si A et son complémentaire sont récursivement énumérables.

2. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si la machine donnée en entrée ne s'arrête sur aucune entrée ?

3. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si le domaine de la machine donnée en entrée est infini ?

4. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si les deux machines passées en argument calculent la même fonction ?

5. Montrer qu'il existe des fonctions totales f et g telles que, pour tout entier x, $\mathrm{Dom}(\varphi_x) = \mathrm{Im}(\varphi_{f(x)})$ et $\mathrm{Im}(\varphi_x) = \mathrm{Dom}(\varphi_{g(x)})$. Sont-elles récursives ?

Exercice 2. *Réels calculables*

Un nombre réel a est dit *récursif* s'il est *récursivement approximable par des rationnels*, c'est-à-dire s'il existe des fonctions récursives F et G de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $n > 0$ on ait $G(n) > 0$ et $\left| |a| - \frac{F(n)}{G(n)} \right| \leq \frac{1}{n}$.

1. Montrer que tout nombre rationnel est récursif.

2. Montrer que les nombres e, $\sqrt{2}$ et π sont récursifs.

3. La coupure dans les rationnels associée au nombre réel a se code par la relation suivante sur les entiers :

$$\mathcal{A} = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 / j \neq 0 \text{ et } \frac{i}{j} < |a| \right\}$$

Montrer que le réel a est récursif si et seulement si la relation $\mathcal{A}$ est récursive.

4. Montrer que le nombre réel a est récursif si et seulement s'il existe un *développement décimal récursif* de a, c'est-à-dire une fonction récursive $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > 0$ on ait $H(n) \leq 9$ et $|a| = \sum_{n=0}^{\infty} H(n).10^{-n}$.

5. Montrer que l'ensemble des réels récursifs forme un sous-corps dénombrable de $\mathbb{R}$, stable par quelques fonctions dont on donnera des exemples.

6. Donner un exemple de réel non récursif.

Exercice 3. *Machines sur écoute*

1. Existe-t-il une fonction récursive f telle que $f(\langle n, q, x \rangle) = 1$ si, lors du calcul sur l'entrée x, la machine numéro n passe dans l'état q et 0 sinon ?

2. On considère dans cette question une énumération des machines de Turing à un ruban bi-infini. Existe-t-il une fonction récursive f telle que $f(\langle n, i, x\rangle) = 1$ si, lors du calcul sur l'entrée x, la tête de lecture de la machine numéro n atteint la case i ?

3. On considère dans cette question une énumération des machines de Turing à un ruban semi-infini. Existe-t-il une fonction récursive f telle que $f(\langle n, i, x\rangle) = 1$ si, lors du calcul sur l'entrée x, la tête de lecture de la machine numéro n atteint la case i ?

Exercice 4. *SAP n'est pas un progiciel*

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale g telle que pour tous x et y, $\varphi_{g(x)}(y) = \varphi_{\varphi_x(x)}(y)$. On convient que si $\varphi_x(x)$ n'est pas définie, $\varphi_{\varphi_x(x)}$ n'est définie nulle part.

2. En déduire le théorème de Kleene :
Pour toute fonction partielle récursive f il existe n tel que $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ (indication : on s'intéressera au numéro de $f \circ g$).

3. Soit f une fonction partielle récursive. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale g telle que

$$\varphi_{g(y)} = \varphi_{f(g(y))}$$

(indication : d'après le théorème snm, il existe une fonction récursive totale s telle que pour tout a, $\varphi_a(\langle y, z, x\rangle) = \varphi_{s(\langle a,y,z\rangle)}(x)$. On prendra g de la forme $g(y) = s(\langle a, y, a\rangle)$ pour un a convenablement choisi.)

Devoir maison :
Lire *La Princesse de Clèves* pour la semaine prochaine.