TD 6 - Où preuves et théorèmes ne seront pas en bijection

Exercice 1. *Monsieur Propre, est-ce N.M. ?*

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale g telle que pour tous x et y, $\varphi_{g(x)}(y) = \varphi_{\varphi_x(x)}(y)$. On convient que si $\varphi_x(x)$ n'est pas définie, $\varphi_{\varphi_x(x)}$ n'est définie nulle part.

2. En déduire le théorème de Kleene :
Pour toute fonction partielle récursive f il existe n tel que $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ (indication : on s'intéressera au numéro de $f \circ g$).

3. Soit f une fonction partielle récursive. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale g telle que

$$\varphi_{g(y)} = \varphi_{f(g(y))}$$

(indication : d'après le théorème snm, il existe une fonction récursive totale s telle que pour tout a, $\varphi_a(\langle y, z, x\rangle) = \varphi_{s(\langle a,y,z\rangle)}(x)$. On prendra g de la forme $g(y) = s(\langle a, y, a\rangle)$ pour un a convenablement choisi.)

Exercice 2. *Un résultat, trois preuves*

Nous allons montrer qu'il existe une fonction partiellement récursive qui ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

1.*Méthode JM*

On dit que deux parties disjointes A et B de $\mathbb{N}$ sont récursivement inséparables s'il n'existe pas d'ensemble récursif $\mathcal{R}$ contenant l'un mais d'intersection nulle avec l'autre.

1. Soit $A = \{i \mid \varphi_i(0) = 0\}$ et $B = \{i \mid \varphi_i(0) = 1\}$. Montrer que ces ensembles sont récursivement inséparables.
2. Soit φ la fonction définie sur $A \cup B$ qui vaut 0 sur A et 1 sur B. Montrer qu'elle est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

2. *Méthode PK*

Soit φ la fonction définie sur l'ensemble des numéros de machine de Turing dont le calcul s'arrête sur l'entrée 0, et telle que pour tout entier i la machine de Turing numéro i s'arrête sur l'entrée 0 après $\varphi(i)$ pas de calcul.
Montrer que cette fonction est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

3.*Méthode MD*

Soit $\phi(i) = \varphi_i(i) + 1$. Montrer que cette fonction est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Exercice 3. *Des ensembles*

1. Les ensembles suivants sont ils récursifs ? récursivements énumérables ? co-récursivement énumérable ?

1. $\{n \in \mathbb{N}, \phi_n(23) \text{ est défini}\}$

2. $\{n \in \mathbb{N}, \phi_n(0) + \phi_n(1) = 48\}$
3. $\{n \in \mathbb{N}, \phi_n(x) = x$ si $\phi_x(x)$ s'arrête et 0 sinon$\}$
4. $\{n \in \mathbb{N}, \phi_{48}(n) = 3\}$
5. $\{n \in \mathbb{N}, \phi_n$ ne s'arrête sur aucun multiple de $n\}$
6. $\{n \in \mathbb{N}, \phi_n(n) = n\}$

Exercice 4. *Des ensembles récursivement énumérables*

1. Montrer qu'une fonction est récursive si et seulement si son graphe est récursivement énumérable.

2. Montrer que tout ensemble récursivement énumérable infini contient un sous-ensemble infini récursif.

3. Montrer qu'il existe une infinité dénombrable d'ensembles récursivement énumérables non récursifs.

Exercice 5. *Ensembles productifs*

On note, pour n entier, W_n le domaine de définition de ϕ_n. Un ensemble A est dit *productif* s'il existe une fonction récursive totale unaire g telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (W_n \subseteq A \Rightarrow g(n) \in A - W_n)$$

1. Un ensemble productif peut il être récursivement énumérable ?

2. Soit A et B deux ensembles de naturels. Montrer que si A se réduit à B (i.e. s'il existe une fonction récursive totale f telle que $\forall n \in \mathbb{N}(n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B)$) et si A est productif, alors B est productif .

3. Montrer que $\{n \in \mathbb{N}, n \notin W_n\}$ est productif. En déduire le théorème de l'arrêt.

4. Montrer que pour toute fonction récursive totale unaire g, il existe une fonction récursive totale k telle que $\forall n \in \mathbb{N}, W_{k(n)} = W_n \cup \{g(n)\}$. En déduire que tout ensemble productif contient un ensemble récursivement énumérable infini.