TD 7 - Calcul propositionnel

Exercice 1. *Théorème de lecture unique*

Soit M un mot sur l'alphabet $\{(,), \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow\} \cup P$, où P est un ensemble de variables propositionnelles. Notons $o(M)$ et $f(M)$ les nombres de parenthèses ouvrantes et fermantes de M.
Soit F une formule du calcul propositionnel sur l'ensemble de variables P.

1. Montrer que l'on a $o(F) = f(F)$.

2. Soit M un segment initial de F. Montrer que $o(M) \geq f(M)$.

3. Montrer que pour toute formule F dont le premier symbole est une parenthèse ouvrante, et pour tout mot M segment initial propre (distinct de F) de F, l'on a : $o(M) > f(M)$.

4. Montrer que tout mot M segment initial propore de F n'est pas une formule.

5. En déduire le théorème de lecture unique : pour toute formule F, un et un seul des trois cas se présente :

i $F \in P$.

ii Il existe une formule G telle que $F = \neg G$.

iii Il existe un unique symbole de connecteur binaire α et un unique couple de formules (G, H) tel que $F = (G \alpha H)$.

Exercice 2. *Marathon des connecteurs binaires*

1. Remplir le *(ou une certaine proportion du)* tableau suivant :

(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	Exemple de formule correspondante	Symbole usuel	Nom usuel
0	0	0	0	$(x_1 \wedge \neg x_1)$	F	*Faux*
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

2. Parmi les formules précédentes, lesquelles suffisent pour exprimer toute fonction booléenne ?

Exercice 3. *Formes normales*

On rappelle qu'une clause conjonctive est une formule de la forme $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, où chaque x_i est un littéral ; qu'une formule est dite sous forme normale disjonctive si et seulement si elle s'écrit comme une disjonction de clauses conjonctives ; que cette formule est dite sous forme normale disjonctive canonique si chaque variable apparaît une unique fois dans chaque clause, et si les clauses ne se répètent pas.

1. Montrer que toute formule non toujours vraie ou toujours fausse admet une unique écriture sous forme normale disjonctive canonique (à l'ordre des facteurs près).

2. De même, on définit et montre l'existence et l'unicité d'une unique formule sous forme normale conjonctive canonique...

Exercice 4. *Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

Considérons un ensemble de variables P, et identifions l'ensemble $\{0, 1\}$ au corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

1. Exprimer les opérations $+$ et $\times$ à l'aide des connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$.

2. Exprimer les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$ à l'aide des opérations $+$ et $\times$.

3. Montrer qu'à toute formule propositionnelle $F(a_1, \ldots, a_n)$ on peut associer un polynome à n indéterminées P tel que $F(a_1, \ldots, a_n) = P(a_1, \ldots, a_n)$. Y a-t-il unicité du polynome P ?

4. En déduire une méthode pour déterminer si deux formules sont logiquement équivalentes, ou si une formule est une tautologie.

Exercice 5. *Un peu d'ordre*

1.Montrer que pour tout ensemble E fini et tout ordre partiel $\leq_p$ sur cet ensemble, cet ordre est prolongeable en un ordre total sur E.

2. Montrer que le résultat est toujours vrai pour tout E dénombrable.

Exercice 6. *le théorème de Ramsey*

Le but de cet exercice est de montrer le **théorème de Ramsey fini** :
Quels que soient les entiers $n \geq 2$ et $m \geq 1$ il existe un entier $l \geq 1$ tel que pour tout ensemble E de cardinal l et toute fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{N}_m = \{1; \ldots; m\}$ il existe $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble d'éléments de E distincts $x_1, \ldots, x_n$ tels que pour tous les entiers i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$ on ait $f(x_i, x_j) = m_0$.
Pour cela, on commence par montrer le **théorème de Ramsey infini** :
Pour tout entier $m \geq 1$, tout ensemble infini E et toute fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{N}_m$ il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts tel que pour tous les entiers i et j tels que $1 \leq i < j$ on ait $f(x_i, x_j) = m_0$.
On commence par fixer $m \geq 1$, E un ensemble infini, f de $E \times E$ dans $\mathbb{N}_m$ et $x_0 \in E$.

1. Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts de E tel que pour tout $i > 0$ on ait $f(x_0, x_i) = m_0$.

2. Montrer qu'il existe un ensemble $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts de E tel que pour tous les entiers i et j tels que $0 \leq i < j$ on ait $f(x_i, x_j) = f(x_i, x_{i+1})$.

3. En déduire le théorème de Ramsey infini.

4. Montrer le théorème de Ramsey fini. On pourra par exemple utiliser un théorème du cours, sans oublier de l'énoncer proprement.