TD 8 - Calcul des prédicats

Exercice 1. *le théorème de Ramsey*

Le but de cet exercice est de montrer le **théorème de Ramsey fini** :
Quels que soient les entiers $n \geq 2$ et $m \geq 1$ il existe un entier $l \geq 1$ tel que pour tout ensemble E de cardinal l et toute fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{N}_m = \{1; \dots ; m\}$ il existe $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble d'éléments de E distincts $x_1, \dots , x_n$ tels que pour tous les entiers i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$ on ait $f(x_i, x_j) = m_0$.
Pour cela, on commence par montrer le **théorème de Ramsey infini** :
Pour tout entier $m \geq 1$, tout ensemble infini E et toute fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{N}_m$ il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts tel que pour tous les entiers i et j tels que $1 \leq i < j$ on ait $f(x_i, x_j) = m_0$.
On commence par fixer $m \geq 1$, E un ensemble infini, f de $E \times E$ dans $\mathbb{N}_m$ et $x_0 \in E$.

1. Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts de E tel que pour tout $i > 0$ on ait $f(x_0, x_i) = m_0$.

2. Montrer qu'il existe un ensemble $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts de E tel que pour tous les entiers i et j tels que $0 \leq i < j$ on ait $f(x_i, x_j) = f(x_i, x_{i+1})$.

3. En déduire le théorème de Ramsey infini.

4. Montrer le théorème de Ramsey fini. On pourra par exemple utiliser un théorème du cours, sans oublier de l'énoncer proprement.

Exercice 2.
Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire , c'est-à-dire comprenant un symbole de relation binaire distingué, que nous notons $R_=$, et $\mathcal{T}$ une théorie de $\mathcal{L}$, à quelle condition la théorie $\mathcal{T}$ aura-t-elle un modèle égalitaire, c'est-à-dire un modèle $\mathcal{M}$ qui est une $\mathcal{L}$-structure dans laquelle le symbole $R_=$ est interprété par l'égalité ? Soit T_{eg} l'ensemble suivant d'énoncés de $\mathcal{L}$ (appelés axiomes de l'égalité) :
- S_1 : $\forall v v R_= v$
- S_2 : $\forall v_1 \forall v_2((v_1 R_= v_2) \rightarrow (v_2 R_= v_1))$
- S_3 : $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3(((v_1 R_= v_2) \wedge (v_2 R_= v_3)) \rightarrow (v_1 R_= v_3))$
- Pour chaque symbole de fonction f de $\mathcal{L}$, d'arité k , l'énoncé

$$\forall v_1 \dots \forall v_k \forall v_{k+1} \dots \forall v_{2k}((\bigwedge_{1 \leq i < k+1} v_i R_= v_{k+i}) \rightarrow (f(v_1, \dots , v_k) R_= f(v_{k+1}, \dots v_{2k})))$$

- Pour chaque symbole de relation S de $\mathcal{L}$, d'arité k , l'énoncé

$$\forall v_1 \dots \forall v_k \forall v_{k+1} \dots \forall v_{2k}((\bigwedge_{1 \leq i < k+1} v_i R_= v_{k+i}) \rightarrow (S(v_1, \dots , v_k) \leftrightarrow S(v_{k+1}, \dots v_{2k})))$$

1. Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$. Montrer qu'un modèle égalitaire de Σ est un modèle de $\Sigma \cup T_{eg}$.

2. Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$. Montrer que Σ admet un modèle égalitaire si et seulement si $\Sigma \cup T_{eg}$ admet un modèle.

3. En déduire que Σ a un modèle égalitaire si et seulement si l'ensemble d'énoncés $\Sigma \cup T_{eg}$ est cohérent.

Exercice 3. *Shibboleth*

Dans chacun des langages ci-dessous, trouver une formule qui distingue les deux structures données.

$< R >$	$< \mathbb{N}, \leq >$	$< \mathbb{Z}, \leq >$
$< R >$	$< \mathbb{Q}, \leq >$	$< \mathbb{Z}, \leq >$
$< *, R_= >$	$< \mathbb{N}, \times, = >$	$< \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, = >$
$< c, *, R_= >$	$< \mathbb{N}, 1, \times, = >$	$< \mathbb{Z}, 1, \times, = >$
$< c, d, +, *, R_= >$	$< \mathbb{R}, 0, 1, +, \times, = >$	$< \mathbb{Q}, 0, 1, +, \times, = >$
$< R >$	$< \mathbb{Z}, \cong_2 >$	$< \mathbb{Z}, \cong_3 >$

Exercice 4. *Hamlet*

On appelle spectre d'une théorie l'ensemble des cardinaux de modèles égalitaires finis de cette théorie.

1. Donner des exemples de théories ayant les spectres suivants :

$$\emptyset$$
$$\mathbb{N}$$
$$\mathbb{N}^*$$
$$\{2\}$$
$$2\mathbb{N}^*$$
$$\{p^2 | p \in \mathbb{N}^*\}$$
$$\{n \in \mathbb{N}^* | n \text{ n'est pas premier}\}$$

Exercice 5. *On recherche Top-modèles*[1]

Le langage est $< r, s, = >$, avec r une relation binaire et s une fonction binaire. On considère la théorie T suivante :

$$\exists a, \forall x, rax$$
$$\forall x, \forall y, sx = sy \rightarrow x = y$$
$$\forall x, sx \neq x$$
$$\forall xy, ry(sx) \wedge rxy \leftrightarrow x = y \vee y = sx$$
$$\forall xy, rxy \wedge ryx \leftrightarrow x = y$$
$$\forall xyz, rxy \wedge ryz \rightarrow rxz$$

1. Donner deux modèles non-isomorphes de T

2. Pouvez-vous trouver une formule qui distingue ces deux modèles ?

1. Écrire à `ivan.morel@ens-lyon.fr`