TD 9 -Théorie des modèles

Exercice 1. *Le Rouge et le Noir*

On considère le langage (R, B, f) (deux prédicats unaires et une fonction unaire). On considère la théorie suivante :

$$\forall x.R(x) \Leftrightarrow \neg B(x) \quad \forall x, y.f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \forall x, R(x) \Leftrightarrow B(f(x))$$

1. Donner deux modèles de cette théorie.

2. Montrer $\forall x, B(x) \Leftrightarrow R(f(x))$

3. Montrer que tout modèle fini de la théorie est de cardinal pair.

4. Montrer que la théorie n'est pas complète.

Exercice 2. *Élimination des quantificateurs*

1. Donner une axiomatisation de la théorie des groupes sur les langages $< 1, \cdot, ^{-1} >, < 1, \cdot >$ et $< \cdot >$

2. On se place dans le langage des groupes et on considère la théorie des groupes vérifiant $\forall x.x^5 = x$. Éliminer, si possible, les quanteurs dans les formules :

1. $\phi_1(x) = \exists y.x = y \cdot x$
2. $\phi_2(x) = \forall y.y = y \cdot x$
3. $\phi_3(x) = \exists y.y = y \cdot x$
4. $\phi_4(x) = \exists z.x \neq z \wedge \forall y.x = y \cdot x$
5. $\phi_5(x) = \exists y.x = y \cdot y \cdot y$
6. $\phi_6(x) = \exists y.x = y \cdot y$

Exercice 3. *Aucun homme n'est jamais assez fort pour ce calcul*

1. Soit $n \geq 1$. Ecrire les énoncés suivants :
- ϕ_n : la structure a au moins n éléments.
- ψ_n : la structure a au plus n éléments.
- E_n : la structure a exactement n éléments.

2. Montrer que toute théorie dont le spectre contient plusieurs éléments n'est pas complète. En déduire que la dernière question de l'exercice 1 était pipeau.

3. Montrer que la théorie des groupes finis n'est pas axiomatisable au premier ordre.

Exercice 4. *Chaînes bicolores*

Le langage est $\{\mathcal{B}, \leq\}$ avec $\mathcal{B}$ prédicat unaire. Les éléments qui satisfont $\mathcal{B}$ sont les points blancs, les autres les points noirs. On appelle *chaine bicolore* une structure sur ce langage totalement ordonnée pour $\leq$. Elle est *générique* si entre deux éléments noirs, il y a toujours un élément blanc, et réciproquement.

1. Donner des exemples de chaines bicolores génériques dénombrables et indénombrables.

2. Donner un exemple de chaine bicolore générique telle que l'ensemble des points blancs est dénombrable mais pas celui des points noirs.

3. Axiomatiser les chaines bicolores génériques.

Exercice 5. *Le retour du quantificateur*

1. Donner un exemple de chaine avec maximum ayant une restriction sans maximum.

2. Donner un exemple d'une chaine sans maximum ayant une restriction avec maximum.

3. Montrer que l'énoncé $\forall x \exists y . x < y$ n'est équivalent à aucun énoncé universel ni à aucun énoncé existentiel.

Exercice 6. *On n'a toujours pas trouvé de Top-modèles*

Le langage est $< r, s, = >$, avec r une relation binaire et s une fonction binaire. On considère la théorie T suivante :

$$\begin{aligned}
&\exists a, \forall x, rax \\
&\forall x, \forall y, sx = sy \rightarrow x = y \\
&\forall x, sx \neq x \\
&\forall xy, ry(sx) \wedge rxy \leftrightarrow x = y \vee y = sx \\
&\forall xy, rxy \wedge ryx \leftrightarrow x = y \\
&\forall xyz, rxy \wedge ryz \rightarrow rxz
\end{aligned}$$

1. Donner deux modèles non-isomorphes de T

2. Pouvez-vous trouver une formule qui distingue ces deux modèles ?

Exercice 7. *L'exo dont je n'ai pas la solution*

Soit M une machine de Turing. On suppose que quelle que soit la configuration du ruban, M s'arrête en temps fini. Montrer qu'il existe k tel que M s'arrête en k étapes au plus sur toute configuration.