MIM1, année 2001-2002

DM1 d'algorithmique

Problème de clefs mélangées.

Etant données n serrures et n clefs (chaque clef ouvre une serrure et une seule, mais on ne sait pas laquelle!), combien faut-il de tests (mettre une clef dans une serrure et voir ce qui se passe) dans le pire des cas ou en moyenne, pour retrouver, pour chaque clef, la serrure qui lui correspond?

A. Un algorithme naïf.

Voici le procédé naturel que l'on se propose pour retrouver les n bonnes correspondances clefs-serrures :

On choisit une clef que l'on teste jusqu'à ce que :

- on ait trouvé la serrure qu'elle ouvre.
- on ait effectué $n-1$ tests. (évidement, cela veut dire que la clef ouvre l'unique porte qui n'a pas été testée.)

On recommence inductivement.

1) Ecrire l'algorithme $\mathfrak{A}_n$ que décrit le procédé ci-dessus. Quelle est sa complexité en nombre de tests dans le pire des cas ?

2) Trouver une fonction f telle que le nombre moyen de tests dans $\mathfrak{A}_n$ est $f(n)+o(1)$.

Indication : On pourra faire une induction sur l'arbre de décision de $\mathfrak{A}_n$.

B. Le plus bête est parfois le meilleur.

On va montrer que l'algorithme $\mathfrak{A}_n$ est optimal (dans la classe des algorithmes utilisant uniquement des mises en mémoire et des tests de serrure) pour la complexité en nombre de tests dans le pire des cas.

3) Montrer qu'il existe un algorithme optimal $\mathcal{A}$ pour la complexité en nombre de tests dans le pire des cas, dont une configuration initiale n'est découverte que par des tests échoués.

On note $\mathcal{P}_2(E)$ l'ensemble des parties à deux éléments d'un ensemble E.

Un *graphe simple non orienté sans boucle* (dans la suite, on dira simplement graphe) est un couple (S,A) où S est un ensemble dont les éléments sont appelés les *sommets* et où $A \subset \mathcal{P}_2(S)$ est l'ensemble des *arêtes*.

Un graphe (S,A) est *biparti* si S est partitionnable en deux ensembles S_1 et S_2 tels que $\forall a \in A, \forall i \in \{1,2\}, |a \cap S_i| = 1$.

Une dernière définition : Un *couplage parfait* C d'un graphe (S,A) est un sous ensemble de A tel que $\forall a,b \in C,(a \cap b = \emptyset$ ou $a = b)$ et $\forall s \in S,\exists a \in C,s \in a$.

4) Montrer que tout graphe biparti $G = (S_1,S_2;A)$ avec $|S_1| = n$, $|A| \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1$ admettant un couplage parfait possède un autre couplage parfait.

5) En déduire que la complexité dans le pire des cas de l'algorithme $\mathcal{A}$ est $\frac{n(n-1)}{2}$.

6) Question subsidiaire. Donner la meilleur borne inférieure (que vous êtes capable de prouver) pour la complexité en moyenne.