Devoir en temps libre d'algorithmique
à rendre le lundi 26 novembre 2001
à Natacha Portier

À rédiger soigneusement.

## Partition

La crémière donne à Jean-Claude et Pascal un plateau de fromages. Ils se répartissent les morceaux, sans les couper, et tout en cherchant à avoir autant que possible le même poids de fromage chacun.

Une donnée du problème de partition est un ensemble fini $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ d'objets, avec pour chaque objet son poids $a_i \in \mathbb{N}$. On supposera (quitte à commencer par un tri si nécessaire) que les objets sont triés par poids décroissant.

Une solution est un couple $S = (Y_1, Y_2)$ d'ensembles disjoints tels que $X = Y_1 \cup Y_2$. La mesure de cette solution est $\max(\sum_{x_i \in Y_1} a_i, \sum_{x_i \in Y_2} a_i)$. On cherche à trouver une solution de mesure aussi petite que possible. On notera $m^*$ la mesure d'une solution optimale.

Q1 Quel est le rapport entre le plateau de fromage et le problème de partition ? Montrez qu'il existe une constante $K$ telle que $m(S) \leq Km^*$ pour toute donnée et toute solution $S$.

Q2 Donner l'algorithme glouton pour ce problème. Pour quelles valeurs de $n$ est-il optimal ?

Q3 Pour $r \in ]1, 2[$ on pose $k(r) = \lceil (2-r)/(r-1) \rceil$. On supposera que $n \geq k(r)$. On étudie un nouvel algorithme qui fonctionne en deux phases :

1. Construire par recherche exhaustive une solution optimale du problème restreint aux objets $\{x_1, \ldots, x_{k(r)}\}$ (qui sont par hypothèse les $k(r)$ plus lourds objets).
2. On complète la solution obtenue pour obtenir une solution du problème de départ en utilisant l'algorithme glouton.

Evaluer la complexité de cet algorithme.

Q4 Soit $Y_i$ l'ensemble le plus lourd à la fin de l'algorithme. Montrez que si aucun objet n'est ajouté à $Y_i$ durant la deuxième phase alors la solution produite est optimale.

Q5 Montrez que dans le cas contraire la solution $S$ produite par l'algorithme vérifie $m(S) \leq rm^*$.

Q6 Montrez que la mesure de la solution produite par l'algorithme glouton vérifie toujours $m_g \leq 6m^*/5$.