TD d'algorithmique numéro 11 -
Olivier Bodini et Natacha Portier
lundi 3 décembre 2001

Question 1 $\star$ Sur le nombre de racines réelles d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dans un intervalle $\star$

Soit f un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et soient a et b deux réels, $a < b$. On dit qu'un suite de polynômes $f_0 = f, f_1, ..., f_s$ est une *suite de Sturm* pour f sur $[a, b]$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $f(a) \times f(b) \neq 0$,
2. la fonction polynôme f_s ne s'annule pas sur $[a, b]$,
3. si c est un réel tel que $a < c < b$ et $f_j(c) = 0$ pour un indice j vérifiant $0 < j < s$, alors on a $f_{j-1}(c) \times f_{j+1}(c) < 0$,
4. si c est un réel tel que $a < c < b$ et $f(c) = 0$, alors le polynôme produit $f(c) \times f_1(c)$ est du signe de $x - c$ au voisinage du point c.

A une telle suite et à un point $x \in]a, b[$, on associe le *nombre de variations de signe de la suite au point* x, noté $V(f_0 = f, f_1, ..., f_s; x)$ (ou plus simplement $V(x)$), défini par la formule :

$$V(x) = |\{(i,j)\,; 0 \leq i < j \leq s; f_i(x) \times f_j(x) < 0 \textit{ et } f_k(x) = 0 \textit{ si } i < k < j\}|$$

Question 1,1 $\star$ Théorème de Sturm $\star$

Montrer le théorème suivant : Soit f un polynôme à coefficient réels et soient a et b deux réels, $a < b$. Si $f_0 = f, f_1, ..., f_s$ est une suite de Sturm pour f sur $[a, b]$, alors le nombre de racines distintes de f sur l'intervalle $[a, b]$ est égal à $V(a) - V(b)$.

Question 1,2 $\star$ construction d'une suite de Sturm $\star$

Soit f un polynôme à coefficient réels et soient a et b deux réels, $a < b$. Considérons la suite $f_0 = f, f_1, ..., f_s$ définie par : $f_0 = f, f_1 = f', f_2 = -f \mod f', ..., f_{i+1} = -f_{i-1} \mod f_i, ..., f_{s+1} = 0$, alors la suite $g_i = f_i / f_s$, $0 \leq i \leq s$, est une suite de Sturm pour g_0 sur $[a, b]$, pourvu que l'on ait $g_0(a) \times g_0(b) \neq 0$.

Question 1,3 $\star$ algorithme $\star$

Montrer le théorème suivant : Soit f un polynôme à coefficient réels et soient a et b deux réels, $a < b$. Considérons la suite $f_0 = f, f_1, ..., f_s$ définie par : $f_0 = f, f_1 = f', f_2 = -f \mod f', ..., f_{i+1} = -f_{i-1} \mod f_i, ..., f_{s+1} = 0$, alors si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls, le nombre de racines distintes de f sur l'intervalle $[a, b]$ est égal à $V(a) - V(b)$.
En déduire un algorithme donnant le nombre de racines réelles de f dans l'intervalle $[a, b]$.

Question 2 $\star$ SAT-n $\star$

On appelle SAT-n le problème SAT restreint aux formules qui n'ont pas plus de n occurences de la même variable.

Question 2,1 $\star$ SAT-3 $\star$

Montrer que SAT-3 n'est pas plus facile que SAT, et donc pas plus facile que SAT-n.

Question 2,2 $\star$ SAT-2 $\star$

Soit x une variable apparaissant dans la formule F de SAT-2. Trouver une formule équivalente à F et dans laquelle la variable x n'apparaisse plus.

En déduire un algorithme polynomial pour SAT-2.

Question 3 $\star$ Variantes de 3-SAT $\star$

Montrer la NP complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

1. 3-SAT NAE (*not all equal*), où l'on impose que les trois variables de chaque clause ne soient pas toutes à la même valeur ;
2. 3-SAT OIT (*one in three*), où l'on impose qu'exactement une variable soit à VRAI dans chaque clause.

Question 2 $\star$ SAT-n $\star$

On appelle SAT-n le problème SAT restreint aux formules qui n'ont pas plus de n occurences de la même variable.

Question 2,1 $\star$ SAT-3 $\star$

Montrer que SAT-3 n'est pas plus facile que SAT, et donc pas plus facile que SAT-n.

Question 2,2 ⋆ SAT-2 ⋆

Soit x une variable apparaissant dans la formule F de SAT-2. Trouver une formule équivalente à F et dans laquelle la variable x n'apparaisse plus.

En déduire un algorithme polynomial pour SAT-2.

Question 3 ⋆ Variantes de 3-SAT ⋆

Montrer la NP complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

1. 3-SAT NAE (*not all equal*), où l'on impose que les trois variables de chaque clause ne soient pas toutes à la même valeur ;
2. 3-SAT OIT (*one in three*), où l'on impose qu'exactement une variable soit à VRAI dans chaque clause.