TD d'algorithmique numéro 11
Yves Robert et Daniel Hirschkoff
semaine du 12 au 17 décembre 1999

Question 1 ⋆ Couverture des sommets d'un graphe ⋆

On couvre un graphe non orienté $G = (S, A)$ en se donnant $S' \subseteq S$ vérifiant la propriété suivante: pour toute arête a de A, au moins l'un des sommets reliés par a est dans S'. La *taille* de la couverture S' est alors définie comme le nombre d'éléments de cet ensemble. On cherche une couverture de taille minimale.

Question 1.1

Exprimer le problème sous forme d'un problème de décision. Montrer que ce problème appartient à NP.

Question 1.2

Montrer, en raisonnant avec la notion de *complément* d'un graphe non orienté (le graphe comportant les arêtes non présentes dans le graphe de départ), que *Clique* $\leq_P$ *Couverture*.

Question 2 ⋆ Somme d'un sous-ensemble ⋆

On se donne un ensemble fini $E \subseteq \mathbb{N}$ et une valeur *cible* $t \in \mathbb{N}$, et on cherche un ensemble $E' \subseteq E$ tel que la somme des éléments de E' soit égale à t.

Question 2.1 ⋆ NP complétude ⋆

On veut montrer que le problème de la somme d'un sous-ensemble est NP-complet en le réduisant à la couverture des sommets d'un graphe G.

Dire que le problème appartient à NP.

On se donne, pour montrer que *Couverture_Sommets* $\leq_P$ *Somme_Sous_Ensemble*, un graphe non orienté $G = (S, A)$ (avec $S = \{v_0, v_1, \ldots, v_{|S|-1}\}$ et $A = \{e_0, e_1, \ldots, e_{|A|-1}\}$), que l'on représente par une matrice d'incidence $B = b_{ij}$ définie de la manière suivante:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } e_j \text{ arrive au sommet } v_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On part également d'un entier k correspondant à l'instance du problème de couverture du graphe sur laquelle on travaille (i.e. on cherche une couverture de taille k).

L'idée est de construire un ensemble E d'entiers qui représentent le graphe. Ces entiers seront écrits en *base 4 modifiée* (B4M), ce qui signifie la chose suivante: les $|A|$ chiffres moins significatifs d'un nombre sont exprimés en base 4, et le chiffre le plus significatif prend une valeur comprise (au sens large entre) zéro et k. On définit ensuite E de la manière suivante:

- pour chaque sommet v_i, on crée un entier positif x_i dont la représentation B4M est constituée d'un 1 suivi de $|A|$ chiffres; ces derniers correspondent à la ligne de v_i dans B. Autrement dit, on a:

$$x_i \;=\; 4^{|A|} + \sum_{0 \leq j \leq |A|-1} b_{ij} 4^j \,.$$

- Pour chaque arête $e_j \in A$, on crée un entier positif y_j représentant une ligne de la matrice identité, i.e.

$$y_j \;=\; 4^j \,.$$

On se donne ensuite t en posant:

$$t \;=\; k 4^{|A|} + \sum_{0 \leq j \leq |A|-1} 2.\, 4^j \,.$$

1. Supposons que le graphe G possède une couverture de sommets $S' \subseteq S$ de taille k, avec $S' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$. On lui associe

$$\begin{aligned} E' \;=\; & \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\} \cup \\ & \{y_j.\, e_j \text{ est incidente à un seul sommet de } S'\} \,. \end{aligned}$$

   Montrer que $\sum_{s \in E'} s = t$.

   ...

2. Réciproquement, soit $E' \subseteq E$ un ensemble dont la somme des éléments vaut t; on écrit $E' = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\} \cup \{y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_p}\}$. Montrer que $m = k$ et que $S' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}\}$ est une couverture de sommets de G.

3. Conclure.

Question 2.2 ⋆ Algorithme en temps exponentiel ⋆

On va définir une solution optimale avec un algorithme en temps exponentiel. On écrit l'algorithme suivant (on suppose disposer d'une fonction *Fusionner* de fusion de listes):

```
Somme_Exacte(S,t):=
  n:=S
  L_0:=[0]
  pour  i de 1 à n faire
    L_i := Fusionner(L_{i-1}, L_{i-1} + x_i)
    supprimer de L_i les éléments supérieurs à t
  finpour
  Retourner le max de L_n
```

Dans l'algorithme ci-dessus, $L_{i-1} + x_i$ désigne la liste d'entiers résultant de L_{i-1} en ajoutant x_i à tous les éléments de la liste.

1. Soit P_i l'ensemble des valeurs obtenues en effectuant les sommes de tous les sous-ensembles de $x_1, \ldots, x_i$. Montrer que

$$P_i \; = \; P_{i-1} \cup (P_i - 1 + x_i)\,.$$

   Montrer que L_i est une liste triée des éléments de P_i de valeur inférieure à t.

2. Quelle est la taille maximale de L_i? Qu'en déduit-on eu égard au temps d'exécution de l'algorithme?

Question 2.3 ⋆ Schéma d'approximation en temps entièrement polynomial ⋆

On s'attache à présent à limiter la taille de L_i, pour obtenir un schéma d'approximation en temps entièrement polynomial. On va pour ce faire introduire une notion de *seuil*, qui va être un réel δ appartenant à $]0;1]$. À ce seuil correspond une transformation d'une liste L en L' selon le principe suivant:

$$y \in L \wedge y \notin L' \;\Leftrightarrow\; \exists z \in L'.\, z \leq y \vee \frac{(y-z)}{y} \leq \delta$$

(NB: la condition ci-dessus peut aussi s'écrire $(1-\delta)y \leq z \leq y$). L'idée est d'*écrêter* L en L'.

1. Écrire l'algorithme de seuil, qui transforme une liste L en une liste écrêtée L'; quelle en est la complexité?

2. Adapter l'algorithme exponentiel; le retour de l'algorithme ainsi obtenu est-il la somme d'un sous-ensemble de S?

   Soit maintenant $y^* \in P_n$ une solution optimale.

3. Montrer que $\frac{d}{dn}(1-\epsilon)^n n > 0$; que peut-on en déduire? En déduire que le résultat de l'approximation n'est pas inférieur de plus de $1-\epsilon$ par rapport à y^*.

4. Établir une borne sur la longueur de L_i en fonction de n et t; qu'en déduit-on?

Question 3 ⋆ Partition ⋆

Le problème de la partition consiste, étant donnés un ensemble fini A et une fonction $s : A \to \mathbb{N}$, à chercher un ensemble $A' \subseteq A$ t.q.

$$\sum_{a \in A'} s(a) \;=\; \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)\,.$$

Montrer que ce problème est NP complet.