TD d'algorithmique numéro 12
Olivier Bodini et Natacha Portier
lundi 10 décembre 2001

Question 1 ⋆ Somme d'un sous-ensemble ⋆

On se donne un ensemble fini $E \subseteq \mathbb{N}$ et une valeur *cible* $t \in \mathbb{N}$, et on cherche un ensemble $E' \subseteq E$ tel que la somme des éléments de E' soit égale à t.

Question 1,1 ⋆ NP complétude ⋆

On veut montrer que le problème de la somme d'un sous-ensemble est NP-complet en le réduisant à la couverture des sommets d'un graphe G.

Montrer que le problème appartient à NP.

On se donne, pour montrer que *Couverture_Sommets* $\leq_P$ *Somme_Sous_Ensemble*, un graphe non orienté $G = (S, A)$ (avec $S = \{v_0, v_1, \ldots, v_{|S|-1}\}$ et $A = \{e_0, e_1, \ldots, e_{|A|-1}\}$), que l'on représente par une matrice d'incidence $B = b_{ij}$ définie de la manière suivante :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } e_j \text{ arrive au sommet } v_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On part également d'un entier k correspondant à l'entrée du problème de couverture du graphe sur laquelle on travaille (i.e. on cherche une couverture de taille k).

L'idée est de construire un ensemble E d'entiers qui représentent le graphe. Ces entiers seront écrits en *base 4 modifiée* (B4M), ce qui signifie la chose suivante : les $|A|$ chiffres moins significatifs d'un nombre sont exprimés en base 4, et le chiffre le plus significatif prend une valeur comprise (au sens large entre) zéro et k. On définit ensuite E de la manière suivante :

- pour chaque sommet v_i, on crée un entier positif x_i dont la représentation B4M est constituée d'un 1 suivi de $|A|$ chiffres ; ces derniers correspondent à la ligne de v_i dans B. Autrement dit, on a :

$$x_i = 4^{|A|} + \sum_{0 \leq j \leq |A|-1} b_{ij} 4^j .$$

- Pour chaque arête $e_j \in A$, on crée un entier positif y_j représentant une ligne de la matrice identité, i.e.

$$y_j = 4^j .$$

On se donne ensuite t en posant :

$$t = k 4^{|A|} + \sum_{0 \leq j \leq |A|-1} 2 . 4^j .$$

1. Supposons que le graphe G possède une couverture de sommets $S' \subseteq S$ de taille k, avec $S' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$. On lui associe

$$\begin{aligned} E' &= \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\} \cup \\ &\quad \{y_j | \, e_j \text{ est incidente à un seul sommet de } S'\} . \end{aligned}$$

   Montrer que $\sum_{s \in E'} s = t$.

2. Réciproquement, soit $E' \subseteq E$ un ensemble dont la somme des éléments vaut t ; on écrit $E' = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\} \cup \{y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_p}\}$. Montrer que $m = k$ et que $S' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}\}$ est une couverture de sommets de G.

3. Conclure.

Question 1,2 ⋆ Algorithme en temps exponentiel ⋆

On va définir une solution optimale avec un algorithme en temps exponentiel. On écrit l'algorithme suivant (on suppose disposer d'une fonction *Fusionner* de fusion de listes) :

Somme_Exacte(S,t):=
  n:=S
  L_0:=[0]
  `pour` i `de` 1 `à` n `faire`
    $L_i :=$ *Fusionner*$(L_{i-1}, L_{i-1} + x_i)$
    supprimer de L_i les éléments supérieurs à t
  `finpour`
  Retourner le max de L_n

Dans l'algorithme ci-dessus, $L_{i-1} + x_i$ désigne la liste d'entiers résultant de L_{i-1} en ajoutant x_i à tous les éléments de la liste.

1. Soit P_i l'ensemble des valeurs obtenues en effectuant les sommes de tous les sous-ensembles de $x_1, \ldots, x_i$. Montrer que

$$P_i = P_{i-1} \cup (P_{i-1} + x_i) .$$

   Montrer que L_i est une liste triée des éléments de P_i de valeur inférieure à t.

2. Quelle est la taille maximale de L_i ? Qu'en déduit-on eu égard au temps d'exécution de l'algorithme ?

Question 1,3 ⋆ Schéma d'approximation en temps entièrement polynomial ⋆

On s'attache à présent à limiter la taille de L_i, pour obtenir un schéma d'approximation en temps entièrement polynomial. On va pour ce faire introduire une notion de *seuil*, qui va être un réel δ appartenant à $]0;1]$. À ce seuil correspond une transformation d'une liste L en L' selon le principe suivant :

$$y \in L \wedge y \notin L' \;\Leftrightarrow\; \exists z \in L'.\, z \leq y \vee \frac{(y-z)}{y} \leq \delta$$

(NB : la condition ci-dessus peut aussi s'écrire $(1-\delta)y \leq z \leq y$). L'idée est d'*écrêter* L en L'.

1. Écrire l'algorithme de seuil, qui transforme une liste L en une liste écrêtée L' ; quelle en est la complexité ?
2. Adapter l'algorithme exponentiel ; le retour de l'algorithme ainsi obtenu est-il la somme d'un sous-ensemble de S ?

   Soit maintenant $y^* \in P_n$ une solution optimale.
3. Montrer que le résultat de l'approximation n'est pas inférieur de plus de $1-\epsilon$ par rapport à y^*. On pourra commencer par montrer que pour tout i et pour tout $y \in P_i$ au plus égal à t il y a un z dans L_i tel que $(1-\frac{\epsilon}{n})^i y \leq z \leq y$.
4. Établir une borne sur la longueur de L_i en fonction de n et t ; qu'en déduit-on ?

Question 2 ⋆ Partition ⋆

Le problème de la partition consiste, étant donnés un ensemble fini A et une fonction $s : A \to \mathbb{N}$, à chercher un ensemble $A' \subseteq A$ t.q.

$$\sum_{a \in A'} s(a) \;=\; \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)\,.$$

Montrer que ce problème est NP complet en utilisant ce qui précède..

Question 3 ⋆ La philanthropie de l'ouvrier charpentier ⋆

Montrer que le problème suivant est NP-complet : On se donne une suite de barres rigides, de longueurs éventuellement différentes et entières, reliées bord-à-bord par des ressorts. Peut-on la plier de manière à ce que la taille obtenue soit au plus k ?