

---

**TD05 - Retour sur les fonctions constructibles**


---

**Exercice 1.***Langages unaires*

Un langage est dit unaire si il est inclus dans  $1^*$ .

1. Donner un algorithme récursif pour résoudre SAT.
2. Soit  $S$  un langage unaire NP-dur. En réduisant SAT à  $S$ , améliorer l'algorithme précédent pour qu'il devienne polynomial.
3. Qu'en concluez-vous ?

**Exercice 2.***Langages creux*

Un langage  $L$  est dit creux lorsqu'il existe un polynôme  $p$  tel que, pour tout  $n$ ,  $L \cap \Sigma^n$  est de cardinal au plus  $p(n)$ .

1. Soit  $L$  un langage creux. Que pouvez-vous dire du cardinal de  $L \cap \Sigma^{\leq n}$  ?
2. Nous allons montrer que si il existe un langage  $L$  creux et NP-dur, alors  $P = NP$ . Soit donc un tel langage  $L$  et soit  $X$  dans NP :

$$x \in X \text{ ssi } \exists w \in \Sigma^{p(|x|)}, \langle x, w \rangle \in A$$

avec  $p$  un polynôme et  $A \in P$ . On veut montrer que  $X$  est décidable en temps polynomial.

Soit  $G(A) = \{\langle x, w \rangle, \text{ tels que } \exists y \in \Sigma^{p(|x|)}, y \geq w \text{ et } \langle x, y \rangle \in A\}$ .

Montrer que  $G(A)$  est dans NP.

3. En utilisant une réduction de  $G(A)$  à  $L$ , montrer que l'on peut décider  $X$  en temps polynomial (conseil : on pourra déterminer un algo polynomial qui, sur l'entrée  $x$ , trouve le plus grand  $w$  tel que  $\langle x, w \rangle \in A$  lorsqu'il existe).

**Exercice 3.***Définition d'une fonction constructible en temps*

Une fonction  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  sera dite constructible en temps si il existe une machine de Turing  $M$  qui sur toute entrée  $x$  de longueur  $n$  s'arrête au bout de  $f(n)$  étapes exactement.

1. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telles que  $f_2$  et  $f_1 + f_2$  sont constructibles en temps. Supposons en outre que pour presque tout  $n$ ,  $f_1(n) \geq \epsilon \cdot f_2(n) + (1 + \epsilon)n$ . Montrer qu'alors  $f_1$  est constructible en temps.

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que  $f(n) \geq n$  et telle qu'il existe un nombre réel positif  $\epsilon$  pour lequel  $f(n) \geq (1 + \epsilon)n$  presque partout.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est constructible en temps.
- il existe une machine de Turing  $M$  qui sur toute entrée  $x$  de longueur  $n$  retourne  $1^{f(n)}$  en temps  $O(n)$ .

**Exercice 4.***Fonctions constructibles en espace*

1. Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en espace :

- La fonction constante égale à  $p$ , pour  $p$  entier.
- $f : n \rightarrow n$
- $f : n \rightarrow n/2$
- $f : n \rightarrow n^2$
- $f : n \rightarrow 2^n$
- $f : n \rightarrow \sqrt{n}$
- $f : n \rightarrow \log_2 n$

Si  $f$  et  $g$  sont constructibles en espace :

- $f - 1$
- $f + g$
- $f.g$
- $2^f$

**Exercice 5.***Fonctions constructibles en temps*

1. Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en temps :

- La fonction constante égale à  $p$ , pour  $p$  entier.
- $f : n \rightarrow n$
- $f : n \rightarrow n^2$
- $f : n \rightarrow 2^n$

Si  $f$  et  $g$  sont constructibles en temps :

- $f + g$
- $f.g$

**Exercice 6.***Reachability et théorème de Savitch*

Soit  $f(n)$  une fonction constructible en espace <sup>1</sup>, montrer que :

- $\text{SPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n))$ , et  $\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n))$
- $\text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n))$
- $\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{TIME}(k^{\log n + f(n)})$  (en utilisant REACHABILITY)

Montrez le théorème de Savitch :  $\text{REACHABILITY} \in \text{SPACE}(\log^2 n)$

On en déduira  $\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$ .

---

<sup>1</sup>ou plutôt une *proper complexity function* au sens de Papadimitriou