Examen de *Complexité algorithmique*
Natacha Portier, le 18 décembre 2008

Notes de cours et de TD interdites

Exercice 1 :
Rappeler sans les montrer les inclusions entre P, NP, EXP et $NEXP$. Lesquelles sont connues pour être strictes ? Montrer que si $NEXP \neq EXP$ alors $P \neq NP$.

Exercice 2 :
Montrer le théorème du cours suivant : un langage L est dans la classe P si et seulement s'il est calculable par une suite P-uniforme de circuits. On commencera par rappeler les définitions nécessaires.

Exercice 3 :
Montrer le théorème de Karp-Lipton : si $NP \subseteq P/poly$ alors $PH = \Sigma_2^p$. On commencera par rappeler les définitions de $P/poly$ et Σ_2^p.

Exercice 4 :
On définit la classe de complexité BPP de la manière suivante : Un langage L est dans BPP s'il existe une machine de Turing probabiliste M et un polynôme p tels que sur toute entrée x de taille n la machine M décide si x est dans L en temps au plus $p(n)$ et avec probabilité d'erreur au plus 2^{-n}.

Soit L un langage vérifiant la propriété suivante. Il existe une machine de Turing probabiliste M et un polynôme p tel que l'espérance du temps de calcul de la machine M sur une entrée de taille n est majoré par $p(n)$. De plus, la machine M reconnait le langage L avec probabilité d'erreur au plus $1/2 - 1/n$.

Montrer que L est dans BPP.

Exercice 5 : DP
On définit DP de la façon suivante : Un langage L est dans DP s'il existe $L_1 \in NP$ et $L_2 \in coNP$ tel que $L = L_1 \cap L_2$.

Question 5,1
Montrer que $NP \subseteq DP$ et $coNP \subseteq DP$.

Question 5,2
Montrer que $DP \subseteq PSPACE$.

La suite en tournant la feuille

Exercice 6 : Etoile
Si L est un langage sur l'alphabet $\{a, b\}$, on note L^* l'ensemble des mots qui s'écrivent comme la concaténation de plusieurs mots de L.

Question 6,1
Montrer que si $L \in P$, alors $L^* \in NP$.

Question 6,2
On considère le graphe à n sommets, numérotés de 1 à n, où on relie i à j si et seulement si les lettres i à j du mot x forment un mot de L. Montrer que si $L \in P$, on peut construire le graphe en temps polynomial.

Question 6,3
En déduire que si $L \in P$, alors $L^* \in P$.