Examen de *Complexité algorithmique*
Natacha Portier, le 6 janvier 2012

Notes de cours et de TD interdites. Rédaction soignée indispensable !

Exercice 1 : Cours de dessin
Donner toutes les inclusions connues entre les classes de complexité suivantes, en précisant les inclusions strictes et les égalités : PH, P, NP, coNP, L, NL, coNL, PSPACE, NPSPACE, coNPSPACE, EXP, NEXP, Σ_2^p, Π_2^p, P/poly, BPP, RP, coRP, ZPP. Justifier les inclusions strictes et les égalités par un théorème du cours, *en citant l'énoncé complet.*

Vous pouvez par exemple représenter les inclusions sous forme de graphe orienté, et utiliser la transitivité de l'inclusion pour limiter le nombre d'arcs.

Exercice 2 : Hiérarchie

Question 2,1
Énoncer et montrer le théorème de hiérarchie en temps pour les machines de Turing déterministes.

Question 2,2
Montrer le théorème suivant : Pour toutes fonctions constructibles en temps f et g avec $f = o(g)$, $\mathsf{coNTIME}(f) \subsetneq \mathsf{NTIME}(g)$. On pourra utiliser une technique similaire à celle de la question précédente et on pourra utiliser sans le redémontrer qu'il existe une machine de Turing non-déterministe universelle simulant les autres machines non-déterministes avec perte de temps au plus linéaire.
En déduire que $\mathsf{coNP} \subsetneq \mathsf{NEXP}$.

Exercice 3 : protocole interactif
Donner la définition de protocole interactif et décrire un protocole interactif pour le problème GNI de la non-isomorphie de graphes (on ne fera pas la preuve). Montrer au choix une des inclusions suivantes : IP inclus dans PSPACE ou PSPACE inclus dans IP.

Exercice 4 : BPP
Montrer que BPP est inclus dans P/*poly*.

Exercice 5 : Meyer
Montrer que si $\mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{P}/poly$ alors $\mathsf{EXP} = \Sigma_2\mathsf{P} \cap \Pi_2\mathsf{P}$.

N'oubliez pas de tourner la page !

Exercice 6 : « Plus petits les espaces… »
Pour $k \geq 0$, soit w_k la concaténation dans l'ordre lexicographique de toutes les chaînes de longueur k, séparées par des signes $\sharp$ ($i.e.\ w_k = 0^{k-2}00\sharp 0^{k-2}01\sharp 0^{k-2}10\sharp \ldots \sharp 1^k$). Soit $W = \{w_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Question 6,1
Montrer que W n'est pas un langage régulier.

Question 6,2
Montrer que $W \in \mathsf{DSPACE}(\log \log n)$.

Exercice 7 : PP
La classe PP est l'ensemble des problèmes X tels qu'il existe une machine de Turing non-déterministe polynomiale M telle que $\bar{x} \in X$ si et seulement si strictement plus de la moitié des calculs de M acceptent $\bar{x}$. C'est une classe de complexité syntaxique.

Question 7,1
Montrer que $\mathsf{BPP} \subseteq \mathsf{PP}$ et que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PP}$.

Question 7,2
Soit ϵ un nombre strictement compris entre 0 et 1. La classe PP_ϵ est l'ensemble des problèmes X tels qu'il existe une machine de Turing non-déterministe polynomiale M telle que $\bar{x} \in X$ si et seulement si la proportion des calculs de M qui acceptent $\bar{x}$ est au moins ϵ. Montrer que $\mathsf{PP}_\epsilon = \mathsf{PP}$.

Question 7,3
Montrer que $\mathsf{PP} = \mathsf{coPP}$. On pourra commencer par montrer que pour tout problème X de PP il existe une machine de Turing non-déterministe polynomiale M telle que $\bar{x} \in X$ si et seulement si strictement plus de la moitié des calculs de M acceptent $\bar{x}$ et $\bar{x} \notin X$ si et seulement si strictement plus de la moitié des calculs de M refusent $\bar{x}$.

Exercice 8 : de la part de Bruno
Montrer au choix un des résultats suivants : $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.