feuille de TD n°10 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
mardi 9 décembre 2003

Problèmes d'optimisation

Un problème d'optimisation NPTIME est un quadruplet $\mathcal{Q} = (K, F, c, \mu)$ où
- K est une classe de structures (sur un vocabulaire fixé), les structures d'entrée
- pour $\mathcal{A} \in K$, $F(\mathcal{A})$ est l'ensemble des solutions pour $\mathcal{A}$, ces solutions sont des parties de A^s (pour un s indépendant de $\mathcal{A}$) ; de plus, $\{(\mathcal{A}, S) \mid A \in K, S \in F(\mathcal{A})\}$ est décidable en temps polynomial,
- c est une fonction calculable en temps polynomial de $\{(\mathcal{A}, S) \mid A \in K, S \in F(\mathcal{A})\}$ dans $\mathbb{N}$,
- $\mu \in \{\min, \max\}$.

On définit $\mathrm{opt}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) = \mu\{c(\mathcal{A}, S) \mid A \in K, S \in F(\mathcal{A})\}$. Un problème d'optimisation $\mathcal{Q}$ est dit polynomialement borné (PB) si $\mathrm{opt}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) = |A|^{O(1)}$. Un problème d'optimisation NPTIME $\mathcal{Q}$ est dit définissable au premier ordre si il existe $\varphi(\bar{x}, \bar{Y}) \in \mathrm{FO}$ tel que pour toute structure $\mathcal{A}$,

$$\mathrm{opt}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) = \mu_{\bar{R}}|\{\bar{a} \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{R})\}|.$$

Question 1. – Montrer que MAX-CUT et MIN-COVER sont définissables au premier ordre.

Question 2. – Montrer qu'un problème d'optimisation est borné polynomialement si et seulement si il est définissable au premier ordre (pour le sens difficile, on pourra introduire un prédicat d'arité k, cet entier k vérifiant $\mathrm{opt}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) \leqslant |A|^k$).

Question 3. – Rappeler pourquoi toute formule du type $\exists \bar{X} \varphi$ avec $\varphi \in \mathrm{FO}$ est équivalente à une formule $\exists \bar{Y} \psi$ avec $\psi \in \Pi_2$ (par skolemisation). En déduire MAX PB = MAX FO = MAX Π_2 et MIN PB = MIN FO = MIN Σ_2.

Question 4. – Montrer que MIN Π_1 = MIN Σ_2 et MIN Σ_0 = MIN Σ_1.

Question 5. – Montrer que MIN CHROMATIC NUMBER est dans MIN Π_1.

Question 6. – Montrer que MIN CHROMATIC NUMBER n'est pas dans MIN Σ_0. La hiérarchie de minimisation est donc composée de deux niveaux exactement

$$\text{MIN } \Sigma_0 = \text{MIN } \Sigma_1 \subsetneq \text{MIN } \Pi_1 = \text{MIN } \Sigma_2.$$

Question 7. – Montrer que MAX Σ_2 = MAX Π_1 ; on introduira pour cela un prédicat supplémentaire destiné à interpréter des témoins pour le premier bloc de quantificateurs existentiel. En déduire que la hiérarchie de maximisation est composée de quatre niveaux au plus

$$\text{MAX } \Sigma_0 \subset \text{MAX } \Sigma_1 \subset \text{MAX } \Pi_1 \subset \text{MAX } \Pi_2.$$

Question 8. – Montrer que les inclusions précédentes sont strictes.