 Natacha Portier
mardi 23 septembre 2003

Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé

Les jeux sont une technique très utile pour montrer qu'on ne peut pas exprimer certaines propriétés dans une logique donnée. On s'intéresse ici à la logique du premier ordre. Soit τ une signature composée de constantes et de relations uniquement. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux τ-structures finies, de domaines A et B respectivement. Un jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé de longueur $m \in \mathbb{N}$ se passe de la manière suivante. À chaque coup, le joueur 1 joue en premier et choisit soit un élément dans $\mathcal{A}$, soit un élément dans $\mathcal{B}$. Le joueur 2 doit alors choisir un élément dans l'autre structure. Appelons $a_i \in A$ et $b_i \in B$ les deux éléments choisis au coup i. À la fin de la partie, après m coups, le joueur 2 a gagné si et seulement si l'application $a_i \mapsto b_i$ est un isomorphisme partiel de τ-structures – c'est à dire si pour toute formule atomique $\psi(x_1, \dots, x_m)$, $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \dots, a_m)$ si et seulement si $\mathcal{B} \models \psi(b_1, \dots, b_m)$. Sinon c'est le joueur 2 qui gagne. L'idée est que le joueur 1 veut montrer que les structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont différentes, alors que le joueur 2 veut montrer qu'elles se ressemblent. Si le joueur 2 a une stratégie gagnante, on écrit $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$. On rappelle qu'on note $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifient les mêmes formules de rang de quantification au plus m.

Théorème 1 (Ehrenfeucht-Fraïssé) *Pour toutes τ-structures finies $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.*

QUESTION 1. – Applications du théorème 1.

1) Soit $\tau = \emptyset$. On veut montrer qu'il n'existe pas de formule du premier ordre exprimant que le cardinal du domaine de la structure est pair.
   a) Supposer par l'absurde qu'une telle formule existe. Appelons m son rang de quantification.
   b) Choisir deux structures finies $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ avec $|\mathcal{A}|$ pair et $|\mathcal{B}|$ impair, et telles que $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.
   c) Conclure.
2) Soit $\tau = \{<\}$, $<$ binaire. On se restreint à la classe des structures totalement ordonnées par $<$. Montrer qu'il n'existe pas de formule du premier ordre exprimant que le cardinal du domaine de la structure est pair.
3) Soit $\tau = \{E\}$, E binaire. On se restreint à la classe des graphes (E étant la relation d'adjacence). Montrer qu'on ne peut pas exprimer au premier ordre la connexité.

QUESTION 2. – Démonstration du théorème 1.

1) Vérifier que $\mathcal{A} \cong_{m+1} \mathcal{B}$ si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tel que $(\mathcal{A}, a) \cong_m (\mathcal{B}, b)$ et pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $(\mathcal{A}, a) \cong_m (\mathcal{B}, b)$.
2) Montrer que $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$ implique $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.
3) On définit le type de m-isomorphisme $\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$ d'un uple (éventuellement vide) $\bar{a} = (a_1, \dots, a_s)$ d'éléments de A dans la structure $\mathcal{A}$ par les formules suivantes (appelées formules de Hintikka). On pose $\bar{v} = (v_1, \dots, v_s)$ et

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{v}) := \bigwedge\{\varphi(\bar{v}) \mid \varphi \text{ atomique ou } \neg\text{atomique}, \mathcal{A} \models \varphi(\bar{a})\}$$

et pour $m > 0$,

$$\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{v}) := \bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\bar{a}a}(\bar{v}, v_{s+1}).$$

Vérifier que les formules $\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$ sont bien du premier ordre, et que le rang de quantification de $\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$ est m.

4) Pour $\bar{a} \in A^s$ et $\bar{b} \in B^s$ montrer, par récurrence sur m, que $(\mathcal{A}, \bar{a}) \cong_m (\mathcal{B}, \bar{b})$ si et seulement si $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}(\bar{b})$.

5) En déduire que $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ implique $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.