TD n°2 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
jeudi 25 septembre 2003

La logique du premier ordre exprime des propriétés locales

Pour une structure relationnelle finie $\mathcal{A}$ de domaine A, on définit le graphe de Gaifman associé $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = (A, E)$ de la manière suivante : $(x, y) \in E$ si x et y appartiennent à un même uple d'une relation de $\mathcal{A}$. On note d la distance dans ce graphe, et $S(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r.

QUESTION 1. – Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux structures relationnelles finies, m un entier et e un majorant strict des cardinaux des boules de rayons 3^m de ces deux structures. On suppose que pour tout type t de 3^m-boule, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ n'ont pas le même nombre de boules de types t, alors elles en ont toutes deux plus de $m \cdot e$. Montrer que $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ (théorème de Hanf).

QUESTION 2. – En déduire (à nouveau) que la connexité d'un graphe fini ne s'exprime pas au premier ordre.

QUESTION 3. – On veut montrer que la connexité des graphes finis ne s'exprime pas par une formule du type $\exists P_1 \dots \exists P_r \psi$ où les P_i sont des relations unaires et ψ du premier ordre sur le langage augmenté de $P_1, \dots, \mathcal{P}_r$.

a) On considère la signature $\tau = \{E, P_1, \dots, P_r\}$. On note $\mathcal{C}_l$ le cycle de longueur l. Soit $m \geqslant 0$. Montrer qu'il existe l_0 tel que pour tout $l \geqslant l_0$, dans toute τ-structure de la forme $(\mathcal{C}_l, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ il existe $a, b \in \mathcal{C}_l$ tels que les boules $S(a, 3^m)$ et $S(b, 3^m)$ sont disjointes et isomorphes.

b) Conclure.

QUESTION 4. – Montrer que la connexité s'exprime par une formule du type $\forall P \psi$, avec P unaire et ψ du premier ordre.

QUESTION 5. – Montrer que la connexité s'exprime par une formule du type $\forall x \forall y \exists P \psi$, avec P unaire et ψ du premier ordre.