TD n°3 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
mardi 30 septembre 2003

Une loi zéro-un

On fixe une signature τ. Pour une classe K de τ-structures on note $L_n(K)$ le nombre de structures de K de domaine $\{1,\dots,n\}$. On note $L_n(\varphi)$ le nombre de modèles de φ de domaine $\{1,\dots,n\}$, et $L_n(\tau)$ le nombre de τ-structures de domaine $\{1,\dots,n\}$. Pour K une classe de τ-structures, on définit $l_n(K) = L_n(K)/L_n(\tau)$. On définit de même $l_n(\varphi) = L_n(\varphi)/L_n(\tau)$. On pose $l(\varphi) = \lim_{n\to\infty} l_n(\varphi)$ si elle existe. On dit qu'un ensemble de formules Ψ vérifie la loi zéro-un étiquetée si pour toute formule $\varphi \in \Psi$ on a $l(\varphi) = 0$ ou $l(\varphi) = 1$.

QUESTION 1. – A-t-on une loi zéro-un dans les cas suivants ?

a) $\tau = \{P, c\}$, avec P unaire et c une constante, et $\Psi = \mathrm{FO}$.

b) $\tau = \{f\}$, avec f symbole de fonction unaire, et $\Psi = \mathrm{FO}$.

c) $\tau = \emptyset$ et $\Psi = L_{\infty\omega}$.

QUESTION 2. – Soit τ une signature relationnelle finie.

a) Écrire les axiomes d'extension : ils expriment que pour tout ensemble de r éléments distincts, il existe un autre élément qui vérifie les relations unaires que l'on souhaite, et entretient exactement les relations que l'on veut avec les r autres points. On note T la théorie composée de tous les axiomes d'extension (pour tout r).

b) Montrer que tout modèle de T est infini. Montrer que T a un modèle dénombrable.

c) Montrer que T n'a qu'un seul modèle dénombrable (à isomorphisme près).

d) Une autre construction de cette structure est la suivante – on le fait pour un graphe uniquement et on l'admet dans le cas gnral. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des sommets. Pour chaque paire $\{i, j\}$ avec $i \neq j$, on tire à pile ou face si on place une arête entre i et j, tous les tirages étant indépendants. Montrer que le graphe obtenu vérifie tous les axiomes d'extension avec probabilité 1. Ceci justifie le nom de graphe (ou τ-structure) aléatoire.

QUESTION 3. – Soit τ une signature relationnelle finie.

a) Montrer que tout axiome d'extension φ vérifie $l(\varphi) = 1$.

b) En déduire que pour la signature τ, la logique du premier ordre vérifie la loi zéro-un.