TD n°4 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
mardi 7 octobre 2003

Loi zéro-un non-étiquetée

On veut maintenant prouver une loi zéro-un où on compte les structures à isomorphisme près. On note $U_n(K)$ ($U_n(\tau), U_n(\varphi)$) le nombre de structures de K (de τ-structres, de modèles de φ) de taille n, à isomorphisme près. On pose $u(K) = \lim_{n\to\infty} U_n(K)/U_n(\tau)$ si elle existe. On définit de même $u(\varphi)$ ainsi que les versions conditionnelles $u_n(K|H) = U_n(K \cap H)/U_n(H)$ et $u(K|H)$ sa limite éventuelle.

QUESTION 1. – Une structure est dite rigide si elle n'a pas d'automorphisme non trivial. On note R la classe des structures rigides.

a) Donner une relation entre $U_n(K)$ et $L_n(K)$ dans le cas général, dans le cas où $K \subset R$ et dans le cas où $K \subset R^c$.
b) Montrer que pour toute classe H on a $u_n(R|H) \leqslant l_n(R|H)$.
c) Soit H, K deux classes de structures. Montrer que si $u(R|H) = 1$ alors $l(K|H) = u(K|H)$.
d) Soit H une classe de structures. Montrer que $u(R|H) = 1$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(H)}{U_n(H) \cdot n!} = 1.$$

QUESTION 2. – Soit τ une signature relationnelle contenant une relation d'arité au moins 2. On veut montrer que $u(R|\tau) = 1$. On suppose pour simplifier que τ possède une relation binaire.

a) Pourquoi suffit-il de traiter le cas où τ est composée d'une relation binaire uniquement ? On considère maintenant $\tau = \{E\}$ avec E binaire.
b) Pour $\rho \in S_n$, on note $I(\rho)$ le nombre de graphes à n sommets étiquetés invariants sous l'action de ρ. Montrer que

$$U_n(\tau) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho\in S_n} I(\rho).$$

c) Pour une permutation ρ, on note $c(\rho)$ le nombre de cycles de ρ et $s(\rho)$ le nombre de points non fixés par ρ. Soit $\rho \in S_n$; montrer que $c(\rho) \leqslant n - s(\rho)/2$.
d) Pour $\rho \in S_n$, on note $\tilde{\rho}$ la permutation de $\{1, \ldots, n\}^2$ définie par $\tilde{\rho}((i, j)) = (\rho(i), \rho(j))$. Evaluer $I(\rho)$ en fonction de $c(\tilde{\rho})$.
e) Montrer que $\sum_{\rho\in S_n\setminus\{\mathrm{Id}\}} 2^{c(\tilde{\rho})-n^2} \to 0$.
f) En déduire la loi zéro-un non-étiquetée dans ce cas.

QUESTION 3. – Reste le cas où τ est composée de relations unaires uniquement.

a) Les τ-structures sont-elles presque sûrement rigides ?
b) Montrer que toute formule du premier ordre sur τ est équivalente à une combinaison booléenne de formules de la forme $\exists^{=l} x\ \psi(x)$ où $\psi(x)$ est une conjonction de τ-formules atomiques (on pourra commencer par le montrer pour les formules de Hintikka).
c) En deduire la loi zéro-un non-étiquetée.