TD n°5 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
mardi 28 octobre 2003

## description logique d'un calcul

On veut montrer les théorèmes suivants : soit $K$ une classe de structures ordonnées

(i) $K \in LOGSPACE$ iff $K \in DTC$
(ii) $K \in NLOGSPACE$ iff $K \in TC$
(iii) $K \in PTIME$ iff $K \in IFP$
(iv) $K \in NPTIME$ iff $K \in \Sigma^1_1$
(v) $K \in PSPACE$ iff $K \in PFP$

QUESTION 1. – Définir les logiques citées.

QUESTION 2. – Codage d'une structure et configuration d'une machine de Turing : définir le codage de la structure comme entrée de la machine, puis le codage d'une configuratione la fonction de transition dans une structure.

QUESTION 3. – Montrer le lemme suivant :

Soit $M$ une machine de Turing dont l'espace est borné en $x^d$. Il existe une formule du premier ordre $\varphi_{start}(\bar{x})$ et des forules du premier ordre $\varphi_{succ}(\bar{x}, X)$ et $\psi_{succ}(X, Y)$ où $X$ et $Y$ sont desprédicats telles que pour toute structure ordonnée $\mathcal{A}$ de cardinal $n$ suffisemment grand et pour tout $\bar{a} \in \mathcal{A}^{d+2}$ on a :
(a) Si $C_0$ est la configuration initiale de $M$ sur l'entrée $\mathcal{A}$ alors
$\mathcal{A} \models \varphi_{start}(\bar{a})$ iff $\bar{a} \in C_0$
(b) si $M$ est déterministe et $C$ est une configuration de $M$ bornée par $n^d$ alors
$\mathcal{A} \models \varphi_{succ}(\bar{a}, C)$ iff $C$ a un successeur $C'$ borné par $n^d$ et $\bar{a} \in C'$
(c) si $C_1$ est une configuration de $M$ bornée par $n^d$ et $C_2$ une relation $(d+2)$-aire sur $\mathcal{A}$ alors
$\mathcal{A} \models \psi_{succ}(C_1, C_2)$ iff $C_2$ est une configuration de $M$ bornée par $n^d$ qui succède à $C_1$.

QUESTION 4. – Montrer le théorème suivant :

Soit $K$ une classe de structures ordonnées sur le langage $\tau$. Si $K$ est dans $PSPACE$ alors $K$ est axiomatisable dans $FO(PFP)$.

QUESTION 5. – En déduire le corollaire :

Soit $K$ une classe de structures ordonnées sur le langage $\tau$ dans $PSPACE$. Alors $K$ est axiomatisable par une formule de $FO(PFP)$ qui utilise une seule occurrence de $PFP$.

QUESTION 6. – Montrer le théorème suivant :

Soit $K$ une classe de structures ordonnées sur le langage $\tau$. Si $K$ est dans $PTIME$ alors $K$ est axiomatisable dans $FO(IFP)$.

QUESTION 7. – En déduire le corollaire :

Soit $K$ une classe de structures ordonnées sur le langage $\tau$ dans $PTIME$. Alors $K$ est axiomatisable par une formule de $FO(IFP)$ qui utilise une seule occurrence de $IFP$.

QUESTION 8. – Montrer le théorème suivant :

Soit $K$ une classe de structures ordonnées sur le langage $\tau$. Si $K$ est dans $NPTIME$ alors $K$ est axiomatisable dans $SO$ par une formule $\Sigma_1^1$.

QUESTION 9. – Montrer le théorème suivant :

Soit $K$ une classe de structures ordonnées sur le langage $\tau$. Si $K$ est dans $LOGSPACE$ alors $K$ est axiomatisable dans $FO(DTC)$.

QUESTION 10. – Montrer le théorème suivant :

Soit $K$ une classe de structures ordonnées sur le langage $\tau$. Si $K$ est dans $NLOGSPACE$ alors $K$ est axiomatisable dans $FO(TC)$.