TD n°6 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
mardi 4 novembre 2003

description logique d'un calcul, suite

On veut montrer les théorèmes suivants : soit K une classe de structures ordonnées

$$\begin{array}{c}
\text{(i) } K \in LOGSPACE \text{ ssi } K \in DTC \\
\text{(ii) } K \in NLOGSPACE \text{ ssi } K \in TC \\
\text{(iii) } K \in PTIME \text{ ssi } K \in IFP \\
\text{(iv) } K \in NPTIME \text{ ssi } K \in \Sigma^1_1 \\
\text{(v) } K \in PSPACE \text{ ssi } K \in PFP
\end{array}$$

QUESTION 1. – Définir les logiques TC et DTC. Montrer que TC est plus expressive que DTC.

QUESTION 2. – Donner des formules $\varphi_+(x,y,z)$, $\varphi_.(x,y,z)$, $\varphi_2(x,y)$ et $\varphi_{log(universe)}(x)$ de DTC telles que pour toute structure ordonnée $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} = \{0,\ldots,||\mathcal{A}||-1\}$ et tous a,b,c de $\mathcal{A}$ on ait :

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{A} & \mathrm{mod}\ \varphi_+[a,b,c] & ssi & a+b=c \\
\mathcal{A} & \mathrm{mod}\ \varphi_.[a,b,c] & ssi & a.b=c \\
\mathcal{A} & \mathrm{mod}\ \varphi_2[a,b] & ssi & 2^a=b \\
\mathcal{A} & \mathrm{mod}\ \varphi_{log(universe)}[a] & ssi & a=\lceil \log ||\mathcal{A}|| \rceil
\end{array}$$

Rappel : une structure ordonnée de cardinal n dans le langage τ est une structure dont les éléments sont $0,\ldots,n-1$ dans le langage τ augmenté de $S, \min, \max, \leq$ où S est le successeur, $\min = 0$, $\max = n-1$ et $\leq$ est l'ordre sur les entiers.

QUESTION 3. – Notation : si $n = ||\mathcal{A}||$ et $l = \log n - 1$ sont fixés, si $m = m_0.2^{l-1} + m_1.2^{l-2} + \cdots + m_{l-2}.2 + m_{l-1}$ alors $[m] = m_0 \ldots m_{l-1}$ et m_k est le k^{e} chiffre binaire de $[m]$.

Montrer qu'il exite des formules de DTC qui, pour toute structure ordonnée $\mathcal{A}$, définissent les relations suivantes :

One mk ssi $m < 2^l$, $k < l$ et le k^{e} chiffre binaire de $[m]$ est 1
Zero mk ssi $m < 2^l$, $k < l$ et le k^{e} chiffre binaire de $[m]$ est 0
One$_d$ $\bar{u}k$ ssi $\bar{u} < 2^l$, $k < (d+1).l$ et le k^{e} chiffre binaire de la concaténation $[u_0]\ldots[u_d]$ est 1
Zero$_d$ $\bar{u}k$ ssi $\bar{u} < 2^l$, $k < (d+1).l$ et le k^{e} chiffre binaire de la concaténation $[u_0]\ldots[u_d]$ est 0
Equal$_d$ $\bar{u}k\bar{u}'$ ssi $\bar{u},\bar{u}' < 2^l$, $k < (d+1).l$ et les mots $[u_0]\ldots[u_d]$ et $[u'_0]\ldots[u'_d]$ diffèrent seulement à la k^{e} position ou pas du tout.

On notera ces formules $\varphi_{one}(x,z)$, $\varphi_{zero}(x,z)$, $\varphi_{d-one}(\bar{x},z)$ et $\varphi_{d-equal}(\bar{x},z,\bar{x}')$.

QUESTION 4. – En supposant pour simplifier que τ est réduit à un symbole R de relation binaire, en déduire le lemme :

Soit M une machine dont l'espace est borné en $d.\log$. Alors il existe des formules $\chi_{start}(\bar{x})$ du premier ordre et $\chi_{succ}(\bar{x},\bar{x'})$ de DTC telles que pour toute structure ordonnée suffisemment grande et de langage τ et pour tout $\bar{a}$ dans $\mathcal{A}$:
(a) $\mathcal{A} \models \chi_{start}[\bar{a}]$ ssi $\bar{a}$ est la configuration de départ.
(b) Pour toute configuration $\bar{a}$ bornée en espace par $(d.\log||\mathcal{A}||)$ et pour tout $\bar{b}$,
$\mathcal{A} \models \chi_{succ}[\bar{a},\bar{b}]$ ssi $\bar{b}$ est une configuration successeur de $\bar{a}$ bornée en espace par $(d.\log||\mathcal{A}||)$.

QUESTION 5. – Montrer que si $K \in LOGSPACE$ alors $K \in DTC$.

QUESTION 6. – Montrer que si $K \in NLOGSPACE$ alors $K \in TC$.

QUESTION 7. – Soit $posDTC$ l'ensemble des formules de DTC telles que DTC n'apparaisse que positivement dans la formule, i.e. pour chaque occurrence de DTC dans l'arbre de la formule, il y a un nombre pair de négations emboitées au dessus (i.e. sur le chemin jusqu'à la racine). On définit de même $posTC$.

Montrer que DTC et $posDTC$ ont le même pouvoir d'expression, puis que $posTC$ est au moins aussi expressive que DTC (pour les modèles finis bien sur). En déduire que toute formule de DTC est équivalente à une formule de TC dans laquelle laquelle l'opération TC n'a aucune négation au dessus d'elle.

QUESTION 8. – Soit M une machine qui travaille en temps polynomial et en espace logarithmique. Montrer qu'on peut demander à disposer des sous-programmes suivants :
(1) un sous-programme qui demande à la tête d'un ruban de travail donné de se déplacer jusqu'à la case la plus à droite visitée jusque là.
(2) un sous-programme qui demande l'effacement complet d'un ruban de travail donné.
(3) un sous-programme qui demande la copie d'un ruban de travail donné sur un autre ruban (choisi vide).
(4) un sous-programme qui, alors que le ruban d'entrée contient n symboles 1, écrit la représentation binaire de n^d sur un ruban de travail (initialisation d'un compteur).

QUESTION 9. – Définition : Une machine représente fortement le fait $K \in \mathcal{C}$ si :
- M accepte K ;
- tout calcul de M sur toute entrée $\mathcal{A}$ s'arrête sur s_+ ou s_-, en particulier si M est déterministe alors M décide K ;
- tout calcul de M sur toute entrée $\mathcal{A}$ remplit les critères de temps et d'espace de $\mathcal{C}$.

Pour toute formule φ dans DTC (resp. TC) montrer que la classe K des modèles ordonnés de φ est dans $LOGSPACE$ (resp. $NLOGSPACE$) et qu'il existe une machine M qui représente fortement cette appartenance.

En déduire que si $K \in DTC$ (resp. $K \in TC$) alors $K \in LOGSPACE$ (resp. $K \in NLOGSPACE$).

QUESTION 10. – Soit K une classe de structures ordonnées. Montrer que :
(a) si $K \in IFP$ alors $K \in PTIME$
(b) si $K \in PFP$ alors $K \in PSPACE$.

QUESTION 11. – Soit K une classe de structures ordonnées. Montrer que :
(a) si $K \in \Sigma_1^1$ alors $K \in NPTIME$
(b) si $K \in SO$ alors $K \in PSPACE$.