TD n°7 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
mardi 25 novembre 2003

description logique d'un calcul, suite

On veut montrer les théorèmes suivants : soit K une classe de structures ordonnées

$$\begin{gathered}
\text{(i) } K \in LOGSPACE \text{ ssi } K \in DTC \\
\text{(ii) } K \in NLOGSPACE \text{ ssi } K \in TC \\
\text{(iii) } K \in PTIME \text{ ssi } K \in IFP \\
\text{(iv) } K \in NPTIME \text{ ssi } K \in \Sigma_1^1 \\
\text{(v) } K \in PSPACE \text{ ssi } K \in PFP
\end{gathered}$$

Question 1. – Soit $posDTC$ l'ensemble des formules de DTC telles que DTC n'apparaisse que positivement dans la formule, i.e. pour chaque occurrence de DTC dans l'arbre de la formule, il y a un nombre pair de négations emboitées au dessus (i.e. sur le chemin jusqu'à la racine). On définit de même $posTC$.

Montrer que DTC et $posDTC$ ont le même pouvoir d'expression, puis que $posTC$ est au moins aussi expressive que DTC (pour les modèles finis bien sur). En déduire que toute formule de DTC est équivalente à une formule de TC dans laquelle laquelle l'opération TC n'a aucune négation au dessus d'elle.

Question 2. – Soit M une machine qui travaille en temps polynomial et en espace logarithmique. Montrer qu'on peut demander à disposer des sous-programmes suivants :
(1) un sous-programme qui demande à la tête d'un ruban de travail donné de se déplacer jusqu'à la case la plus à droite visitée jusque là.
(2) un sous-programme qui demande l'effacement complet d'un ruban de travail donné.
(3) un sous-programme qui demande la copie d'un ruban de travail donné sur un autre ruban (choisi vide).
(4) un sous-programme qui, alors que le ruban d'entrée contient n symboles 1, écrit la représentation binaire de n^d sur un ruban de travail (initialisation d'un compteur).

Question 3. – Définition : Une machine représente fortement le fait $K \in \mathcal{C}$ si :
- M accepte K ;
- tout calcul de M sur toute entrée $\mathcal{A}$ s'arrête sur s_+ ou s_-, en particulier si M est déterministe alors M décide K ;
- tout calcul de M sur toute entrée $\mathcal{A}$ remplit les critères de temps et d'espace de $\mathcal{C}$.

Pour toute formule φ dans DTC (resp. TC) montrer que la classe K des modèles ordonnés de φ est dans $LOGSPACE$ (resp. $NLOGSPACE$) et qu'il existe une machine M qui représente fortement cette appartenance.

En déduire que si $K \in DTC$ (resp. $K \in TC$) alors $K \in LOGSPACE$ (resp. $K \in NLOGSPACE$).

Question 4. – Soit K une classe de structures ordonnées. Montrer que :
(a) si $K \in IFP$ alors $K \in PTIME$
(b) si $K \in PFP$ alors $K \in PSPACE$.

QUESTION 5. – Soit K une classe de structures ordonnées. Montrer que :
(a) si $K \in \Sigma_1^1$ alors $K \in NPTIME$
(b) si $K \in SO$ alors $K \in PSPACE$.

Parle t-on bien des mêmes classes de complexité ? Pour $PTIME$ on définit :
$\mathcal{C}$ est l'ensemble des langages $L \subset \mathbb{A}^*$, où $\mathbb{A}$ est un alphabet, tels qu'il existe une machine de Turing déterministe qui accepte L en temps polynomial.
$\mathcal{C}'$ est l'ensemble des classes K de structures ordonnées sur le vocabulaire τ contenant $<$ telles qu'il existe une machine de Turing déterministe acceptant K en temps polynomial.

On définit de même $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ pour $LOGSPACE$, $NLOGSPACE$, $PTIME$, $NPTIME$ et $PSPACE$.

QUESTION 6. – Nous allons montrer que "via un codage, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$", et réciproquement. Soit $\mathbb{A}$ un alphabet et τ le vocabulaire $\{<\} \cup \{P_a | a \in \mathbb{A}\}$ où les P_a sont des symboles de relations unaires. A un mot $u_1 \dots u_n$ sur $\mathbb{A}$ on associe la structure K_u sur τ avec pour ensemble de base $1 < 2 < \cdots < n$ et $P_a(i)$ ssi $u_i = a$. Pour tout langage L soit K_L l'ensemble des K_u pour $u \in L$. Donner une formule qui caractérise $K(\mathbb{A}^*)$ et conclure. Faire la réciproque.

QUESTION 7. – Montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ ssi $\mathcal{C}'_1 \subset \mathcal{C}'_2$.

QUESTION 8. – Montrer que :
(a) $FO(IFP) \equiv FO(PFP)$ (ont le même pouvoir d'expression) sur les structures ordonnées ssi $PTIME = PSPACE$ (en théorie classique de la complexité)
(b) $FO(IFP) \equiv \Sigma_1^1$ sur les structures ordonnées ssi $PTIME = NPTIME$ (en théorie classique de la complexité)
(c) $FO(IFP) \equiv SO$ sur les structures ordonnées ssi $PTIME = NPTIME$ (en théorie classique de la complexité)

QUESTION 9. – Montrer que :
(a) $FO(DTC) \leq FO(TC) \leq FO(IFP) \leq \Sigma_1^1 \leq FO(PFP)$
(b) on n'a pas $FO(DTC) \equiv FO(PFP)$

ex 7.5.10 ? ?

Une logique capture une classe de complexité si... p.151

Une logique capture fortement une classe de complexité si ... p.156

QUESTION 10. – Montrer que l'autre implique l'un

QUESTION 11. – Montrer que Σ_1^1 capture fortement $NPTIME$.

QUESTION 12. – Montrer que Π_1^1 capture fortement $co-NPTIME$.

QUESTION 13. – Montrer que $NPTIME = co-NPTIME$ ssi $\Sigma_1^1 = \Pi_1^1$.

QUESTION 14. – Montrer que $NPTIME = co-NPTIME$ ssi $\Sigma_1^1 = SO$.

QUESTION 15. – Montrer que $NLOGSPACE = co-NLOGSPACE$.