feuille de TD n°8 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis Natacha Portier
jeudi 27 novembre 2003

description logique d'un calcul, suite

QUESTION 1. – Nous allons montrer que $posTC \equiv TC$.
(1) Montrer le lemme suivant : Soit τ contenant deux constantes c et d. Soit φ une formule existentielle de $posTC$, c'est à dire une formule construite avec des formules atomiques et des négations de formules atomiques en utilisant $\vee$, $\wedge$, TC et $\exists$. Alors, dans les modèles de $\neg c = d$, φ est équivalente à une formule de la forme $[TC_{\bar{x},\bar{x}'}\psi(\bar{x},\bar{x}')]\bar{c},\bar{d}$ où ψ est une formule sans quantificateur.
(2) Soit τ contenant $\{S,<,\min,\max\}$. Sur les τ-structures ordonnées avec au moins deux éléments. Montrer que toute formule de $posTC$ est équivalente à une formule de la forme $[TC_{\bar{x},\bar{x}'}\psi(\bar{x},\bar{x}')]\bar{\min},\bar{\max}$ où ψ est une formule sans quantificateur.
(3) Un uple d'éléments de la structure peut être vu comme l'entier dont il est l'écriture en base n. Quel uple représente $||A||^r$? Soit $d_\psi(\bar{a},\bar{b})$ la longueur du plus petit chemin non vide défini par la formule ψ et reliant $\bar{a}$ à $\bar{b}$ quand il existe, et ∞ sinon. Montrer que $d_\psi(\bar{a},\bar{b}) < \infty$ ssi $0 < d_\psi(\bar{a},\bar{b}) \leq ||A||^r$, puis que $\neg[TD_{\bar{x},\bar{y}}\psi(\bar{x},\bar{y})]\bar{s},\bar{t}$ est équivalente à

$$||\{\bar{v}|d_\psi(\bar{s},\bar{v}) < \infty\}|| = ||\{\bar{v}|d_{(\psi(\bar{x},\bar{y})\vee\neg\bar{y}=\bar{t})}(\bar{s},\bar{v}) < \infty\}||$$

Nous allons maintenant nous efforcer d'exprimer cette égalité par une formule de $posTC$.
(4) Pour toute formule $\varphi(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r)$ de $posTC$ donner une formule $\psi(\bar{x},\bar{y},z_1,\dots,z_{r+1})$ de $posTC$ exprimant que $d_\phi(\bar{x},\bar{y}) \leq \bar{z}$.
(5) En utilisant une définition inductive de la fonction $g(\bar{x},\bar{u}) = ||\{\bar{y}|d_\phi(\bar{x},\bar{y}) \leq \bar{u}\}||$, donner une formule $\chi_\phi(\bar{x},\bar{u},\bar{z},\bar{z}')$ de $posTC$ exprimant que si $g((\bar{x},\bar{u}) = \bar{z}$ alors $g((\bar{x},\bar{u}+1) = \bar{z}'$
(6) En déduire que pour toute formule du premier ordre $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ il existe une formule $\rho_\varphi(\bar{x},\bar{z})$ de $posTC$ qui exprime que $||\{\bar{y}|d_\phi(\bar{x},\bar{y}) \leq \infty\}|| = \bar{z}$.
(7) Conclure
(8) Montrer le corollaire suivant : Soit τ contenant $\{S,<,\min,\max\}$. Sur les τ-structures ordonnées avec au moins deux éléments, toute formule de TC est équivalente à une formule de la forme $[TC_{\bar{x},\bar{x}'}\psi(\bar{x},\bar{x}')]\bar{\min},\bar{\max}$ où ψ est une formule sans quantificateur.

Parle t-on bien des mêmes classes de complexité ? Pour $PTIME$ on définit :
$\mathcal{C}$ est l'ensemble des langages $L \subset \mathbb{A}^*$, où $\mathbb{A}$ est un alphabet, tels qu'il existe une machine de Turing déterministe qui accepte L en temps polynomial.
$\mathcal{C}'$ est l'ensemble des classes K de structures ordonnées sur le vocabulaire τ contenant $<$ telles qu'il existe une machine de Turing déterministe acceptant K en temps polynomial.

On définit de même $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ pour $LOGSPACE$, $NLOGSPACE$, $PTIME$, $NPTIME$ et $PSPACE$.

QUESTION 2. – Nous allons montrer que "via un codage, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$", et réciproquement. Soit $\mathbb{A}$ un alphabet et τ le vocabulaire $\{<\} \cup \{P_a|a \in \mathbb{A}\}$ où les P_a sont des symboles de relations unaires. A un mot $u_1 \dots u_n$ sur $\mathbb{A}$ on associe la structure K_u sur τ avec pour ensemble de base $1 < 2 < \dots < n$ et $P_a(i)$ ssi $u_i = a$. Pour tout langage L soit K_L l'ensemble des K_u pour $u \in L$. Donner une formule qui caractérise $K(\mathbb{A}^*)$ et conclure. Faire la réciproque.

Question 3. – Montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ ssi $\mathcal{C}'_1 \subset \mathcal{C}'_2$.

Question 4. – Montrer que :
(a) $FO(IFP) \equiv FO(PFP)$ (ont le même pouvoir d'expression) sur les structures ordonnées ssi $PTIME = PSPACE$ (en théorie classique de la complexité)
(b) $FO(IFP) \equiv \Sigma^1_1$ sur les structures ordonnées ssi $PTIME = NPTIME$ (en théorie classique de la complexité)
(c) $FO(IFP) \equiv SO$ sur les structures ordonnées ssi $PTIME = NPTIME$ (en théorie classique de la complexité)

Question 5. – Montrer que :
(a) $FO(DTC) \leq FO(TC) \leq FO(IFP) \leq \Sigma^1_1 \leq FO(PFP)$
(b) on n'a pas $FO(DTC) \equiv FO(PFP)$

Question 6. – Une logique $\mathcal{L}$ capture une classe de complexité $\mathcal{C}$ si pour tout τ contenant $<$ et pour toute classe K de structures ordonnées sur τ on a : $K \in \mathcal{C}$ ssi K est axiomatisable dans $\mathcal{L}$. Donner des exemples

Question 7. – Une logique $\mathcal{L}$ capture fortement une classe de complexité $\mathcal{C}$ si pour tout τ et pour toute structure classe K de structures sur τ on a : $K \in \mathcal{C}$ ssi K est axiomatisable dans $\mathcal{L}$. Sur le vocabulaire vide, la classe des structures de cardinal pair n'est pas axiomatisable dans DTC. Qu'en est-il si on ajoute $<$ au vocabulaire ? Qu'en conclure ?

Question 8. – Montrer que si $\mathcal{L}$ capture fortement $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{L}$ capture $\mathcal{C}$.

Question 9. – Montrer que Σ^1_1 capture fortement $NPTIME$.

Question 10. – Montrer que Π^1_1 capture fortement $co-NPTIME$.

Question 11. – Montrer que $NPTIME = co-NPTIME$ ssi $\Sigma^1_1 = \Pi^1_1$.

Question 12. – Montrer que $NPTIME = co-NPTIME$ ssi $\Sigma^1_1 = SO$.

Question 13. – Montrer que $NLOGSPACE = co-NLOGSPACE$.