feuille de TD n°9 – Complexité descriptive et théorie des modèles finis — Natacha Portier
mardi 2 décembre 2003

description logique d'un calcul, suite

Parle t-on bien des mêmes classes de complexité ? Pour $PTIME$ on définit :
$\mathcal{C}$ est l'ensemble des langages $L \subset \mathbb{A}^*$, où $\mathbb{A}$ est un alphabet, tels qu'il existe une machine de Turing déterministe qui accepte L en temps polynomial.
$\mathcal{C}'$ est l'ensemble des classes K de structures ordonnées sur le vocabulaire τ contenant $<$ telles qu'il existe une machine de Turing déterministe acceptant K en temps polynomial.

On définit de même $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ pour $LOGSPACE$, $NLOGSPACE$, $PTIME$, $NPTIME$ et $PSPACE$.

QUESTION 1. – Nous allons montrer que "via un codage, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$", et réciproquement. Soit $\mathbb{A}$ un alphabet et τ le vocabulaire $\{<\} \cup \{P_a | a \in \mathbb{A}\}$ où les P_a sont des symboles de relations unaires. A un mot $u_1 \dots u_n$ sur $\mathbb{A}$ on associe la structure K_u sur τ avec pour ensemble de base $1 < 2 < \dots < n$ et $P_a(i)$ ssi $u_i = a$. Pour tout langage L soit K_L l'ensemble des K_u pour $u \in L$. Donner une formule qui caractérise $K(\mathbb{A}^*)$ et conclure. Faire la réciproque.

QUESTION 2. – Montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ ssi $\mathcal{C}_1' \subset \mathcal{C}_2'$.

QUESTION 3. – Montrer que :
(a) $FO(IFP) \equiv FO(PFP)$ (ont le même pouvoir d'expression) sur les structures ordonnées ssi $PTIME = PSPACE$ (en théorie classique de la complexité)
(b) $FO(IFP) \equiv \Sigma_1^1$ sur les structures ordonnées ssi $PTIME = NPTIME$ (en théorie classique de la complexité)
(c) $FO(IFP) \equiv SO$ sur les structures ordonnées ssi $PTIME = NPTIME$ (en théorie classique de la complexité)

QUESTION 4. – Montrer que :
(a) $FO(DTC) \leq FO(TC) \leq FO(IFP) \leq \Sigma_1^1 \leq FO(PFP)$
(b) on n'a pas $FO(DTC) \equiv FO(PFP)$

QUESTION 5. – Une logique $\mathcal{L}$ capture une classe de complexité $\mathcal{C}$ si pour tout τ contenant $<$ et pour toute classe K de structures ordonnées sur τ on a : $K \in \mathcal{C}$ ssi K est axiomatisable dans $\mathcal{L}$. Donner des exemples

QUESTION 6. – Une logique $\mathcal{L}$ capture fortement une classe de complexité $\mathcal{C}$ si pour tout τ et pour toute structure classe K de structures sur τ on a : $K \in \mathcal{C}$ ssi K est axiomatisable dans $\mathcal{L}$. Sur le vocabulaire vide, la classe des structures de cardinal pair n'est pas axiomatisable dans DTC. Qu'en est-il si on ajoute $<$ au vocabulaire ? Qu'en conclure ?

QUESTION 7. – Montrer que si $\mathcal{L}$ capture fortement $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{L}$ capture $\mathcal{C}$.

QUESTION 8. – Montrer que Σ_1^1 capture fortement $NPTIME$.

QUESTION 9. – Montrer que Π_1^1 capture fortement $co - NPTIME$.

QUESTION 10. – Montrer que $NPTIME = co - NPTIME$ ssi $\Sigma_1^1 = \Pi_1^1$.

QUESTION 11. – Montrer que $NPTIME = co - NPTIME$ ssi $\Sigma_1^1 = SO$.

QUESTION 12. – Montrer que $NLOGSPACE = co - NLOGSPACE$.