Maîtrise de Mathématiques

Logique et Complexité, TD1

Natacha Portier

Jeudi 30 janvier 2003

Exercice 0. S'il existe à la fois une injection et une surjection d'un ensemble E dans un ensemble F alors il existe une bijection entre ces deux ensembles, c'est ce que nous apprend le théorème de Cantor. Montrer que ceci devient faux quand on enrichit la structure par une relation : chacune se plonge dans l'autre mais elles ne sont pas isomorphes.

Exercice 1. Démontrer que deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement si $\forall \bar{x}\ [\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})]$ est vrai dans toute $\mathcal{L}$-structure.

Exercice 2. Démontrer que dans une conjonction ou dans une disjonction de plusieurs arguments, tout choix de parenthèses donne une formule équivalente.

Exercice 3. Démontrer que toute formule est équivalente à une formule prénexe.

Exercice 4. Soit $(\varphi \downarrow \psi)$ une abbréviation pour $\neg(\varphi \vee \psi)$. Démontrer que toute formule est équivalente à une formule qui n'utilise que $\downarrow$ et $\exists$ comme symbole logique.

Exercice 5. Soit $\mathcal{L} = \{B, \leq\}$, où B est un prédicat unaire, et $\leq$ une relation binaire. On appelle *chaîne bicolore* une $\mathcal{L}$-structure totalement ordonnée par $\leq$ (les éléments satisfaisant B qualifiant comme *blanc*, les autres comme *noir*); elle est *générique* si entre deux éléments blancs il y en a toujours au moins un noir, et entre deux noirs il y a toujours au moins un blanc.
a) Donner des exemples de chaîne bicolore dénombrable et non dénombrable.
b) Montrer que si b est le cardinal de l'ensemble des points blancs, et n celui des points noirs, alors dans une chaîne bicolore générique $b \leq 2^n$ et $n \leq 2^b$.
c) Axiomatiser les chaînes bicolores génériques.

Exercice 6. Soit $\mathcal{L}$ le langage qui comporte, outre l'égalité, deux relations unaires $U(x)$ et $V(x)$, ainsi qu'une relation binaire $R(x, y)$. On considera la $\mathcal{L}$-théorie T suivante:

- $\exists x_0 \ldots \exists x_4 (\bigwedge_{i<j\leq 4} \neg\ x_i = x_j)$.

- $\forall x\,\{[U(x) \vee V(x)] \wedge \neg[U(x) \wedge V(x)]\}$.
- $\forall x \forall y\,\{R(x,y) \rightarrow [U(x) \wedge V(y)]\}$.
- Pour tout $n < \omega$ les axiomes

$$\forall x_0 \forall y_0 \ldots \forall x_n \forall y_n\,\{[\bigwedge_{i,j\leq n} (U(x_i) \wedge U(y_j) \wedge \neg\, x_i = y_j)] \rightarrow \exists z\,[\bigwedge_{i\leq n}(R(x_i,z) \wedge \neg R(y_i,z))]\},$$

$$\forall x_0 \forall y_0 \ldots \forall x_n \forall y_n\,\{[\bigwedge_{i,j\leq n} (V(x_i) \wedge V(y_j) \wedge \neg x_i = y_j)] \rightarrow \exists z\,[\bigwedge_{i\leq n}(R(z,x_i) \wedge \neg R(z,y_i))]\}.$$

Quels sont les modèles de T ?

Exercice 7 Ecrire les formules signifiant :

- ϕ_n : La structure a au moins n éléments
- ψ_n : La structure a au plus n éléments
- E_n : La formule a exactement n éléments

Exercice 8 Montrer qu'une théorie qui admet (au moins) deux modèles finis dont le cardinal est différent n'est pas complète.

Exercice 9 Soit $n > 1$ un entier. Montrer que la théorie des groupes finis à n^2 éléments dans le vocabulaire $(1, \cdot, ^{-1})$ n'est pas complète.

Exercice 10 On considère le langage (R, B, f), où R et B sont des prédicats unaires et f une fonction unaire. Considérons la théorie donnée par les axiomes :

- $\forall x, R(x) \iff \neg B(x)$
- $\forall x, y, f(x) = f(y) \implies x = y$
- $\forall x, R(x) \iff B(f(x))$

Questions :

- Trouver un modèle de la théorie
- Montrer $\forall x, B(x) \iff R(f(x))$

- Montrer que tout modèle fini de la théorie est de cardinal pair
- Montrer que la théorie n'est pas complète

Exercice 11 On considère le langage $(\top, \nabla, \oplus, \otimes)$, les deux premiers symboles étant des constantes et les deux derniers des fonctions d'arité 2, représentées de façon infixe. Considérons la théorie formée des axiomes:

- $\forall x, \forall y, x \oplus y = y \oplus x$
- $\forall x, \forall y, x \otimes y = y \otimes x$
- $\forall x, \forall y, \forall z (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
- $\forall x, \forall y, \forall z (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
- $\forall x, \forall y, \forall z, x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$
- $\forall x, x \oplus x \oplus x = \top$
- $\forall x, x \otimes x = \nabla$

Questions :

- Trouver un modèle de cette théorie (Chercher un modèle à un seul élément)
- Montrer que tout modèle de cette théorie vérifie :
  - $\top \oplus \top = \top$
  - $\top \oplus \nabla = \nabla$
  - $\top = \nabla$
  - $\forall x, x \otimes \top = \top$
- Considérons la structure $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où les symboles sont interprétés par :
  - $\top = \nabla = (0, 0)$
  - $\forall x_1, x_2, \forall y_1, y_2, (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$
  - $\forall x_1, x_2, \forall y_1, y_2, (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (0, x_2 \times y_2)$

Montrer que cette structure est bien modèle de la théorie

- En déduire que la théorie n'est pas complète.