Maîtrise de Mathématiques

Logique et Complexité, TD2

Natacha Portier

Jeudi 13 février 2003

Exercice 1 Un $\mathcal{L}$-morphisme préserve les quanteurs existentiels de la gauche vers la droite et les quanteurs universels de la droite vers la gauche.

Exercice 2 Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des $\mathcal{L}$-structures avec $M \subseteq N$. Alors $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathfrak{N}$ si et seulement si l'injection canonique est un $\mathcal{L}$-morphisme.

Exercice 3 Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.
- $Th(\mathfrak{M}, M) = Th(\mathfrak{N}, M)$.
- l'injection canonique $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire.

Exercice 4 Soient $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$ des $\mathcal{L}$-structures.

1. Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$.
2. Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Trouver un exemple avec $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, mais $\mathfrak{N} \not\prec \mathfrak{N}'$.

Exercice 5 Entre quelles structures dans la liste suivante est-ce qu'il y a un $\mathcal{L}$-morphisme? un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire? Donner le morphisme, si possible.

$$\langle \mathbb{Q}, \leq, +, 0 \rangle, \quad , \langle \mathbb{Q}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, +, 0 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}^+, \leq, \cdot, 1 \rangle$$

Exercice 6 Si $\mathcal{L}$ contient des constantes, montrer:

1. Toute $\mathcal{L}$-structure a une unique sous-structure minimale.
2. Si $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, alors leurs sous-structures minimales sont isomorphes.

Exercice 7 Une théorie est *modèle-complète* si toute injection d'un modèle dans un autre est élémentaire. Soient T et T' deux théories modèle-complètes dans un même langage $\mathcal{L}$, telles que tout modèle de T s'injecte dans un modèle de T', et tout modèle de T' s'injecte dans un modèle de T. Montrer que T et T' sont équivalentes.

Exercice 8 Montrer que $\prec$ est transitive.

Exercice 9 Soit $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{P}$ trois structures sur le même langage vérifiant

- $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{P}$
- $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{P}$
- $M \subset N$

Montrer que $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$

Exercice 10 Donner un exemple d'une théorie qui à n modèles dénombrables non élémentairement équivalentes (prendre un langage qui n'a que des constantes).

Exercice 11 On se place dans un langage vide (donc sans fonctions et dont le seul prédicat est l'égalité)

- Ecrire l'énoncé ϕ_n qui traduit l'existence d'au moins n éléments distincts.
- Montrer que la théorie $\{\phi_n, n > 0\}$ est complète.

Exercice 12 On se place dans un langage ne contenant qu'un prédicat binaire $\mathcal{R}$, représentant une relation et noté de manière infixe (on notera donc $x\mathcal{R}y$ plutôt que $\mathcal{R}(x, y)$)

- Ecrire les formules
  - χ : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
  - $\phi_n(x)$: La classe d'équivalence de x a au moins n éléments.
  - ψ_n : Il y a au moins n classes d'équivalence distinctes.

- A l'aide des formules précédentes, écrire un ensemble d'énoncés désignant une théorie qui a une infinité de classes d'équivalences, chacune d'entre elles étant infinie.
- On pose $\mathfrak{M} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est interprété par

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a = c$$

  Montrer que $\mathfrak{M}$ est un modèle de la théorie considérée
- Montrer que cette théorie n'a qu'un modèle dénombrable
  (ou encore : tous les modèles dénombrables sont isomorphes)
- En déduire que la théorie est complète.

On se donne dans la suite un entier $p > 0$.

- Ecrire les énoncés
  - α : Chaque classe d'équivalence a exactement p éléments
  - β : Il y a exactement p classes d'équivalence.
- Pour chacune des théories suivantes :
  1. Ecrire les énoncés correspondant
  2. Donner un modèle de la théorie
  3. Expliquer (brièvement) pourquoi la théorie est complète

  - Une relation d'équivalence qui a une infinité de classes, toutes de cardinal p.
  - Une relation d'équivalence qui a p classes, toutes infinies.