Master de Mathématiques / Master d'Informatique fondamentale

Logique et Complexité, TD2

Natacha Portier, Jeudi 9 février 2006

**Exercice 1** Est-ce qu'un $\mathcal{L}$-morphisme préserve les quanteurs existentiels de la gauche vers la droite ? De la droite vers la gauche ? Et les quanteurs universels de la gauche vers la droite ? De la droite vers la gauche ?

**Exercice 2** Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des $\mathcal{L}$-structures avec $M \subseteq N$. Montrer que $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathfrak{N}$ si et seulement si l'injection canonique est un $\mathcal{L}$-morphisme.

**Exercice 3** Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Parmi les trois conditions suivantes dire lesquelles sont équivalentes :

(1) $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$

(2) $Th(\mathfrak{M}, M) = Th(\mathfrak{N}, M)$

(3) l'injection canonique $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire

**Exercice 4** Soient $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$ des $\mathcal{L}$-structures.

a) Montrer que si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$.

b) Montrer que si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

c) Trouver un exemple avec $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, mais $\mathfrak{N} \not\prec \mathfrak{N}'$.

**Exercice 5** Entre quelles structures dans la liste suivante y a t-il un $\mathcal{L}$-morphisme, un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire ? Donner si possible le morphisme.

$$\langle \mathbb{Q}, \leq, +, 0 \rangle, \quad \langle \mathbb{Q}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, +, 0 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}^+, \leq, \cdot, 1 \rangle$$

**Exercice 6** Si $\mathcal{L}$ contient des constantes, montrer que :

a) Toute $\mathcal{L}$-structure a une unique sous-structure minimale.

b) Si $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, alors leurs sous-structures minimales sont isomorphes.

**Exercice 7** Une théorie est *modèle-complète* si toute injection d'un modèle dans un autre est élémentaire. Soient $T$ et $T'$ deux théories modèle-complètes dans un même langage $\mathcal{L}$, telles que tout modèle de $T$ s'injecte dans un modèle de $T'$, et tout modèle de $T'$ s'injecte dans un modèle de $T$. Montrer que $T$ et $T'$ sont équivalentes.

**Exercice 8** Donner un exemple d'une théorie qui à $n$ modèles dénombrables non élémentairement équivalents.

**Exercice 9** On se place dans un langage ne contenant qu'un prédicat binaire $\mathcal{R}$, représentant une relation et noté de manière infixe (on notera donc $x\mathcal{R}y$ plutôt que $\mathcal{R}(x,y)$)

- Ecrire les formules
  - $\chi$ : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
  - $\phi_n(x)$ : La classe d'équivalence de $x$ a au moins $n$ éléments.
  - $\psi_n$ : Il y a au moins $n$ classes d'équivalence distinctes.
- A l'aide des formules précédentes, écrire un ensemble d'énoncés désignant une théorie qui a une infinité de classes d'équivalences, chacune d'entre elles étant infinie.
- On pose $\mathfrak{M} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est interprété par
  $$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a = c$$
  Montrer que $\mathfrak{M}$ est un modèle de la théorie considérée
- Montrer que cette théorie n'a qu'un modèle dénombrable
  (ou encore : tous les modèles dénombrables sont isomorphes)
- En déduire que la théorie est complète.

On se donne dans la suite un entier $p > 0$.

- Ecrire les énoncés
  - $\alpha$ : Chaque classe d'équivalence a exactement $p$ éléments
  - $\beta$ : Il y a exactement $p$ classes d'équivalence.
- Pour chacune des théories suivantes :
  1. Ecrire les énoncés correspondant
  2. Donner un modèle de la théorie
  3. Expliquer (brièvement) pourquoi la théorie est complète

  - Une relation d'équivalence qui a une infinité de classes, toutes de cardinal $p$.
  - Une relation d'équivalence qui a $p$ classes, toutes infinies.