Maîtrise de Mathématiques

Logique et Complexité, TD3

Natacha Portier

Jeudi 20 février 2003

Exercice 1 Si $\mathcal{L}$ contient des constantes, montrer que :

1. Toute $\mathcal{L}$-structure a une unique sous-structure minimale.

2. Si $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, alors leurs sous-structures minimales sont isomorphes.

Exercice 2 Une théorie est *modèle-complète* si tout plongement d'un modèle dans un autre est élémentaire. Deux théories dans un même langage $\mathcal{L}$ sont compagnes si pour tout modèle M de l'une quelconque des deux il existe un modèle M' de l'autre dont M soit une sous-structure. Soient T et T' deux théories dans un même langage $\mathcal{L}$, modèle-complètes et compagnes. Montrer que T et T' sont équivalentes.

Exercice 3 Donner un exemple d'une théorie qui à n modèles dénombrables non élémentairement équivalents.

Exercice 4 On se place dans un langage ne contenant qu'un prédicat binaire $\mathcal{R}$, représentant une relation et noté de manière infixe (on notera donc $x\mathcal{R}y$ plutôt que $\mathcal{R}(x,y)$)

Question 4,1 Écrire les formules

- χ : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- $\phi_n(x)$: La classe d'équivalence de x a au moins n éléments.
- ψ_n : Il y a au moins n classes d'équivalence distinctes.

Question 4,2 À l'aide des formules précédentes axiomatiser la théorie T des modèles qui ont une infinité de classes d'équivalences, chacune d'entre elles étant infinie.

Question 4,3 On pose $\mathfrak{M} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est interprété par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a = c$$

Montrer que $\mathfrak{M}$ est un modèle de T

Question 4,4 Montrer que T n'a qu'un modèle dénombrable.

Question 4,5 Montrer que T est complète.

Question 4,6 On se donne dans la suite un entier $p > 0$. Écrire les énoncés :

- α : Chaque classe d'équivalence a exactement p éléments.
- β : Il y a exactement p classes d'équivalence.

Question 4,7 Soit T' la théorie des modèles qui ont une infinité de classes d'équivalences, chacune d'entre elles de cardinal p.

1. Axiomatiser cette théorie
2. Donner un modèle de la théorie
3. Est-ce que la théorie est complète ?

Question 4,8 Mêmes questions pour la théorie T'' des modèles qui ont p classes d'équivalences, toutes infinies.

Exercice 5 Soient $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$ des $\mathcal{L}$-structures. Trouver un exemple avec $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, mais $\mathfrak{N} \not\prec \mathfrak{N}'$.

Exercice 6 Entre quelles structures dans la liste suivante est-ce qu'il y a un $\mathcal{L}$-morphisme? un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire? Donner le morphisme, si possible.

$$\langle \mathbb{Q}, \leq, +, 0 \rangle, \quad , \langle \mathbb{Q}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, +, 0 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}^+, \leq, \cdot, 1 \rangle$$