Master de Mathématiques / Master d'Informatique fondamentale

Logique et Complexité, TD3

Natacha Portier, Jeudi 16 février 2006

Exercice 1 Nous allons montrer que $(\mathbb{Q},<) \prec (\mathbb{R},<)$

(1) Montrer le lemme 1 : Supposons que les réels $b_1,\dots,b_n$ et les rationnels $a_1,\dots,a_n$ satisfont les mêmes formules atomiques, i.e. pour toute formule atomique $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ sans paramètre on a :

$(\mathbb{Q},<) \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ ssi $(\mathbb{R},<) \models \varphi(b_1,\dots,b_n)$.

Alors pour tout réel b_0 il existe un rationnel a_0 tel que $b_0,\dots,b_n$ et $a_0,\dots,a_n$ satisfasse les mêmes formules atomiques.

(2) Montrer le lemme 2 : Supposons que les réels $b_1,\dots,b_n$ et les rationnels $a_1,\dots,a_n$ satisfont les mêmes formules atomiques. Montrer que pour toute formule $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ sans paramètre on a :

$(\mathbb{Q},<) \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$ ssi $(\mathbb{R},<) \models \varphi(b_1,\dots,b_n)$.

(3) Conclure

(4) Pouvez-vous le montrer pour $(\mathbb{Q},<)$ et $(\mathbb{N},<)$?

Exercice 2 Montrer que $(\mathbb{Q},<,+,0) \prec (\mathbb{R},<,+,0)$

Exercice 3 On se place dans un langage ne contenant qu'un prédicat binaire $\mathcal{R}$, représentant une relation et noté de manière infixe (on notera donc $x\mathcal{R}y$ plutôt que $\mathcal{R}(x,y)$)

Question 3,1 Écrire les formules

- χ : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- $\phi_n(x)$: La classe d'équivalence de x a au moins n éléments.
- ψ_n : Il y a au moins n classes d'équivalence distinctes.

Question 3,2 À l'aide des formules précédentes axiomatiser la théorie T des modèles qui ont une infinité de classes d'équivalences, chacune d'entre elles étant infinie.

Question 3,3 On pose $\mathfrak{M} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est interprété par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a = c$$

Est-ce que $\mathfrak{M}$ est un modèle de T ?

Question 3,4 Combien T a t-elle de modèles dénombrables ?

Question 3,5 Est-ce que T est complète ?

Question 3,6 On se donne dans la suite un entier $p > 0$. Écrire les énoncés :

- α : Chaque classe d'équivalence a exactement p éléments.
- β : Il y a exactement p classes d'équivalence.

Question 3,7 Soit T' la théorie des modèles qui ont une infinité de classes d'équivalences, chacune d'entre elles de cardinal p.

1. Axiomatiser cette théorie
2. Donner un modèle de la théorie
3. Est-ce que la théorie est complète ?

Question 3,8 Mêmes questions pour la théorie T'' des modèles qui ont p classes d'équivalences, toutes infinies.

Exercice 4 Une théorie est *modèle-complète* si tout plongement d'un modèle dans un autre est élémentaire. Deux théories dans un même langage $\mathcal{L}$ sont compagnes si pour tout modèle M de l'une quelconque des deux il existe un modèle M' de l'autre dont M soit une sous-structure. Soient T et T' deux théories dans un même langage $\mathcal{L}$, modèle-complètes et compagnes. Montrer que T et T' sont équivalentes.

Exercice 5 Donner un exemple d'une théorie qui a exactement n modèles dénombrables non élémentairement équivalents.