Maîtrise de Mathématiques

Logique et Complexité, TD4

Natacha Portier

Jeudi 6 mars 2003

**Exercice 1** Montrer qu'une théorie $T$ qui a des modèles finis arbitrairement grands a un modèle infini.

**Exercice 2** Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de $\mathcal{L}_{gp}$-formules tel que dans tout groupe $G$ un élément $g$ satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de $g$ est fini.

**Exercice 3** Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de $\mathcal{L}_{ann}$-formules tel que dans tout corps $K$ un élément $a$ satisfait $\Phi(x)$ si et seulement s'il est algébrique sur le corps premier (c'est-à-dire, satisfait une équation polynômiale non-triviale à coefficients entiers).

**Exercice 4** Soit $T$ un ensemble d'énoncés, et $\phi$ un énoncé tel que $T \vdash \phi$. Montrer qu'il existe une partie finie $T' \subseteq T$ telle que $T' \vdash \phi$.

**Exercice 5** Soit $T$ une théorie finie, $T_1$ et $T_2$ deux ensembles d'énoncés tels que $T_i \models T$ (pour $i = 1, 2$), et tout modèle de $T$ est modèle de $T_1$ ou (exclusif) de $T_2$. Montrer que $T_1$ et $T_2$ sont finiment axiomatisables.

**Exercice 6** Peut-on axiomatiser les groupes de torsion ?

**Exercice 7** Soit $T$ la théorie de $\mathfrak{N}$ dans le langage des anneaux. Montrer qu'il existe un modèle de $T$ contenant $\mathfrak{N}$ et un élément $a$ non nul divisible par tous les entiers.

**Exercice 8,1** Existe t-il une théorie des relations d'équivalence n'ayant que des classes finies ?

**Exercice 8,2** Existe t-il une théorie des relations d'équivalence n'ayant qu'un nombre fini de classes ?

**Exercice 8,3** La théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes infinies est-elle finiment axiomatisable ?

**Exercice 9** Montrer le théorème de Vaught (appelé aussi Los Vaught) : Soit $T$ une théorie dans un langage dénombrable $L$ et n'ayant que des modèles infinis. S'il existe un cardinal infini $\kappa$ telle que $T$ soit $\kappa$-catégorique alors $T$ est complète.

**Exercice 10** On se convaincra que si un espace vectoriel sur un corps $K$ est de cardinal strictement supérieur à celui de $K$ alors son cardinal est égal à sa dimension.

Soit $T$ la théorie des groupes abéliens indéfinimenyt divisibles sans torsion. Nous allons montrer que cette théorie est complète.

**Exercice 10,1** Soit $G$ un modèle de $T$ (groupe noté multiplicativement)et $\theta_n$ la fonction de $G$ dans $G$ qui à $x$ associe $x^n$. Montrer que $\theta_n$ est bijective.

**Exercice 10,2** Montrer qu'on peut munir un modèle $G$ de $T$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 10,3** Montrer que $T$ est $\aleph_1$ catégorique.

**Exercice 10,4** Montrer que $T$ n'est pas $\aleph_0$ catégorique. Quels sont ses modèles dénombrables ?

**Exercice 10,5** Conclure.