Master de Mathématiques / Master d'Informatique fondamentale

Logique et Complexité, TD5

Natacha Portier

Jeudi 9 mars 2006

Exercice 1 : On admettra le théorème d'arithmétique suivant, dit "théorème des quatre carrés" : tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels. On se place dans le langage des anneaux.

Question 1,1 : Pour tout entier naturel n décrire une formule $\phi_n(x)$ de ce langage qui exprime que la différence $x - n$ est somme de quatre carrés.

Question 1,2 : Montrer que cette famille de formules est finiment satisfiable dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 1,3 : Montrer qu'aucun sous-corps de $\mathbb{R}$ n'est ω-saturé.

Exercice 2 : On considère le langage réduit à un symbole R de relation binaire en plus de l'égalité.

Question 2,1 : Écrire un énoncé ϵ_0 de ce langage exprimant que R est une relation d'equivalence, ce qu'on suppose désormais. Pour chaque entier n strictement positif décrire une formule $\phi_n(x)$ exprimant que la classe de x modulo R a au moins n éléments, et une formule $\psi_n(x)$ exprimant que la classe de x modulo R a exactement n éléments. Écrire un énoncé ϵ_n exprimant que R a exactement une classe comprenant n éléments.

Question 2,2 : Montrer que l'ensemble T formé de tous les ϵ_n est consistant.

Question 2,3 : Soient a_1, ..., a_m un nombre fini d'éléments d'un modèle M de T ; montrer que l'ensemble de formules formé de $\neg(xRa_1)$, ..., $\neg(xRa_m)$ et de tous les $\phi_n(x)$ est finiment satisfiable dans M.

Question 2,4 : Montrer que dans tout modèle ω-saturé de T il y a une infinité de classes toutes infinies.

Question 2,5 : Montrer que deux modèles ω-saturés de T se correspondent par un va-et-vient infini.

Question 2,6 : Montrer que deux modèles de T sont toujours élémentairement équivalents.

Question 2,7 : À quelle condition une extension de modèles de T est-elle élémentaire ?

Exercice 3 : On appelle graphe une relation binaire G de base M non vide qui est antiréflexive ((a,a) ne satisfait jamais G) et symétrique (si (a,b) satisfait G alors (b,a) aussi). Pour la commodité de l'expression on dit que a et b sont liés (par G) quand $G(a,b)$ est satisfaite.; un chemin reliant a_0 à a_n est une suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ de points de M dont deux consécutifs a_i et a_{i+1} sont toujours liés ; la composante connexe de a est formée de a et des éléments de M qui lui sont liés par un chemin ; le graphe est dit connexe s'il n'y a qu'une composante connexe, c'est-à-dire si deux points a e b distncts sont toujours reliés par un chemin. Enfin, on dit que G est de valence au plus v si un point de M est lié (ne pas confondre avec relié par un chemin !) à au plus v autres points, tandis que G est de valence exactement v si chaque point de G est lié à exactement v autres.

Question 3,1 : Exprimer par un énoncé du premier ordre dans le langage d'une relation binaire G que G est un graphe de valence exactement 2.

Question 3,2 : Montrer qu'un graphe connexe de valence exactement 2 est isomorphe à la relation de consécutivité de l'anneau $\mathbb{Z}$ (a et b sont liés si $a = b + 1$ ou $b = a + 1$) ou bien celle de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$; ce dernier cas on parlera de cycle de longueur n.

Question 3,3 : Décrire pour chaque entier $n \geq 3$ un énoncé du premier ordre exprimant qu'il n'y a pas de cycle de longueur n. La théorie T des graphes sans cycles de valence exactement 2 est-elle finiment axiomatisable ?

Question 3,4 : Si a et b sont dans la base d'un modèle M de T on posera $d(a,b) = \infty$ si a et b gisent dans des composantes connexes différentes et

$d(a,b) = n$ sinon et si l'unique chemin reliant a à b est de longueur n (i.e. $d(a,a) = 0$, $d(a,b) = 1$ si a et b sont liés, etc.). Montrer que dans un modèle ω-saturé de T l y a une infinité de composantes connexes.

Question 3,5 : Montrer que si M et N sont deux modèles de T ayant une infinité de composantes connexes, les bijections entre une partie finie de M et une partie finie de N qui préservent la distance d sont des ∞-isomorphismes. Montrer que T est complète. Quels sont les modèles ω-saturés de T ?

Question 3,6 : Montrer qu'il n'existe aucun énoncé du premier ordre exprimant qu'un graphe est connexe

Question 4 : Montrer que si σ est un k-isomorphisme entre $\bar{m} \in \mathcal{M}$ et $\bar{n} \in \mathcal{N}$ alors pour toute formule $\phi(\bar{x})$ de rang de quantification au plus k on a $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ ssi $\mathcal{N} \models \phi(\bar{n})$. Que pensez-vous de la réciproque ?