Master de Mathématiques / Master d'Informatique fondamentale

Logique et Complexité, TD6

Natacha Portier

Jeudi 16 mars 2006

Exercice 1. On se place dans le langage des groupes, et on s'intéresse à la théorie des groupes vérifiant $\forall x\ x^5 = x$. Eliminer, si possible, les quanteurs dans les formules :

$\varphi_1(x) = \quad \exists y\ x = y \cdot x$
$\varphi_2(x) = \quad \forall y\ y = y \cdot x$
$\varphi_3(x) = \quad \exists y\ y = y \cdot x$
$\varphi_4(x) = \quad \exists y\ x = y \cdot y$
$\varphi_5(x) = \quad \exists z\ x \neq z \wedge \forall y\ x = y \cdot x$
$\varphi_6(x) = \quad \exists y\ x = y \cdot y \cdot y$

Exercice 2. Donner un exemple d'une théorie modèle-complète incomplète.

Remarque : On verra dans le chapitre suivant que la théorie des corps algébriquement clos est modèle-complète sans être complète (il manque uniquement la caractéristique du corps). Nous demandons évidemment ici un autre exemple.

Exercice 3. Soit T une théorie. On ajoute au langage $\mathcal{L}$ les relations n-aires R_ϕ pour toute $\mathcal{L}$-formule ϕ n-aire, obtenant ainsi le langage $\mathcal{L}'$. On considère la théorie T' :

$$T' = T \cup \{\forall x_1 \dots x_n\ [\phi(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow R_\phi(x_1 \dots x_n)]\ :\ \phi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}$$

1. Montrer que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de T on peut définir une interprétation des relations qui sont dans $\mathcal{L}'$ mais pas dans $\mathcal{L}$ de manière à obtenir un modèle $\mathfrak{M}'$ de T', et qu'il y a une unique manière de le faire.

2. Montrer que tout $\mathcal{L}'$-formule est équivalente modulo T' à une $\mathcal{L}$-formule.

3. Montrer que T' élimine les quanteurs.

4. Montrer que T' est modèle-complète.

5. Montrer que T est modèle-complète si et seulement si

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \implies \mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{N}'.$$

Remarque : Dans cet exercice, nous avons démontré que, quitte à changer le langage, on peut transformer une théorie en une théorie modèle-complète, mais qui n'a plus nécessairement les mêmes inclusions de modèles. En fait, quitte à perdre certains modèles, mais cette fois-ci en restant dans le même langage, on peut quelquefois obtenir à partir d'une théorie une nouvelle théorie, dite sa modèle-complétion.

Exercice 4. On appelle modèle-complétion d'une théorie T une théorie $T^\star$ avec $T \subset T^\star$ telle que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de T

- Il existe un modèle de $T^\star$ qui contient $\mathfrak{M}$;
- Tous les modèles de $T^\star$ qui contiennent $\mathfrak{M}$ sont élémentairement équivalents dans $\mathcal{L}(M)$.

1. Montrer que $T^\star$ est modèle-complète.
2. Montrer qu'il n'existe qu'une seule modèle-complétion (c'est à dire : deux modèle-complétions de T sont équivalentes).
3. Montrer qu'une théorie complète non modèle-complète n'admet pas de modèle-complétion. En donner un exemple.

Exercice 5. On se place dans le langage de la théorie des ordres.

1. Donner un exemple d'une chaîne avec maximum ayant une restriction sans maximum.
2. Donner un exemple d'une chaîne sans maximum ayant une restriction avec maximum.
3. Montrer que l'énoncé $\forall x \exists y \; x < y$ n'est équivalent à aucun énoncé universel ni à aucun énoncé existentiel.