1 Développements ultérieurs de la théorie des ensembles

Dans cette dernière section, on va essayer de présenter rapidement quelques développements ultérieurs de la théorie des ensembles, après les bases posées par Cantor, Zermelo... que l'on a vues précédemment. Ayant défini relativement rigoureusement ce qu'est un univers, il est naturel de se demander les propriétés qu'il vérifie. Surtout si ces propriétés sont utilisés par certains mathématiciens, comme l'axiome du choix. Or on va voir que la question de savoir si l'axiome du choix était vrai ou faux a été résolue en deux étapes: dans les années 30 d'abord, où Gödel développe le modèle interne des constructibles. Puis finalement dans les années 60 lorsque Cohen invente la technique du forcing.

1.1 Modèles internes

1.1.1 Introduction: cohérence relative

Dans les autres branches des mathématiques, la cohérence d'une théorie ne fait pas problème, car on dispose d'un modèle de celle-ci. Ainsi par exemple, on sait que la théorie des groupes est non contradictoire car on dispose de $(\mathbb{Z},+)$. En va-t-il de même pour ZF ? $(\mathbb{Z},+)$ existe car on suppose que l'on se place dans un univers, modèle de ZF, où l'on dispose de ω, à partir duquel on construit $(\mathbb{Z},+)$. Mais rien ne nous dit que l'on peut trouver un modèle de ZF.
En théorie des ensembles, il n'y aura donc pas de sens à parler de cohérence - absolue. On ne pourra parler que de *cohérence relative* . C'est-à-dire que l'on ne pourra espérer démontrer que des assertions du type: Si telle théorie est cohérente, alors telle autre l'est aussi. On va par exemple montrer que si ZF est cohérente, alors ZFC l'est aussi - où $ZFC = ZF + AC$.

1.1.2 Le modèle interne $\mathbb{L}$ des constructibles

Pour montrer la consistance de AC et de HC, Gödel a mis en évidence un modèle particulier de $ZFC + HC$. L'idée intuitive est de partir d'un modèle quelquonque de ZF: $\mathbb{V}$, et de considŕer la classe des ensembles constructibles dans $\mathbb{V}$, à partir de $\emptyset$ - de même que dans le corps des réels, $\mathbb{Q}$ peut être vu comme l'ensemble des éléments constructibles à partir de 0 et 1. Cette classe sera notée $\mathbb{L}$. On dit que c'est un modèle interne, et on peut vérifier que $\mathbb{L}$ est un modèle de $ZFC+HC$. On va présenter $\mathbb{L}$ et donner quelques idées concernant les démonstrations des résultats annoncés.

Définissabilité.

Définition Soit A un ensemble - de $\mathbb{V}$. Soit $\vec{a}$ une suite finie d'éléments de A, et $\phi(x,\vec{a})$, une formule du langage de la théorie des ensembles. On note $D^A_{\phi,\vec{a}}$ le sous ensemble de A, constitué des éléments définissables dans A par la formule $\phi(x,\vec{a})$.
Ainsi, $D^A_{\phi,\vec{a}} = \{x \in A : (A,\in) \models \phi(x,\vec{a})\}$.
Soit alors $Def(A) = \{D^A_{\phi,\vec{a}} : \phi$ est une formule, et $\vec{a}$ une suite finie d'éléments de $A\}$.
On vérifie assez facilement les propriétés suivantes :

Lemme
- $Def(A) \subset P(A)$
- $A \in Def(A)$
- Toute partie finie ou cofinie de A appartient à $Def(A)$

- Si A est transitif, $A \subset Def(A)$ et $Def(A)$ est transitif
- Si A est infini et bien ordonné, alors $Card(Def(A)) = Card(A)$.

Définition de $\mathbb{L}$

On pose:

$\mathbb{L}_0 = \emptyset$,
$\mathbb{L}_{\alpha+1} = Def(\mathbb{L}_\alpha)$
et pour λ limite, $\mathbb{L}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbb{L}_\alpha$.

On pose alors $\mathbb{L} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathbb{L}_\alpha$.

Il n'est alors pas très difficile de prouver à partir du lemme précédent que l'on a :

Lemme Pour tous ordinaux $\alpha < \beta$
- $\mathbb{L}_\alpha$ est transitif
- $\mathbb{L}_\alpha \subset \mathbb{L}_\beta$
- $\mathbb{L}_\alpha \in \mathbb{L}_{\alpha+1}$
- $\mathbb{L}_\alpha \subset \mathbb{V}_\alpha$
- Si α est infini, alors $Card(\mathbb{L}_\alpha) = Card(\alpha)$.

Et on peut montrer qu'on a le
Théorème $\mathbb{L}$ est un modèle transitif de ZF

-cf par exemple [Kunen].

Cohérence de AC

Proposition $\mathbb{L} \models AC$.

Démonstration: On va montrer qu'en fait, $\mathbb{L}$ peut être muni d'un bon ordre.
Lemme Si A est bien ordonnable, alors $Def(A)$ aussi.
Démonstration: Il suffit de bien ordonner $A^{<\omega} \times Form$, où $A^{<\omega}$ est l'ensemble des suites finies sur A, et $Form$ l'ensemble des formules de la théorie des ensembles, car $Def(A)$ en est une image surjective. Soit $\leq_A$ un bon ordre sur A. Soit alors $\leq$ l'ordre défini sur $A^{<\omega}$ par $(a_1, a_2, ...a_n) \leq (a_1, a_2, ...a_m) \leftrightarrow (n < m)$ ou ($n = m$ et $(a_1, a_2, ...a_n) \leq (a_1, a_2, ...a_m)$ pour l'ordre lexicographique issu de $\leq_A$). $Form$ est bien ordonnable car dénombrable. Enfin, on ordonne bien le produit $A^{<\omega} \times Form$, par l'ordre lexicographique $\bullet$

En fait il est facile de modifier $\leq$ pour que $A \subset Def(A)$, soit un segment initial de $Def(A)$. On peut alors construire un bon ordre $\leq_{\mathbb{L}_\alpha}$ sur $\mathbb{L}_\alpha$ par induction sur α.
- $\leq_{\mathbb{L}_\emptyset} = \emptyset$,
- $\leq_{\mathbb{L}_{\alpha+1}}$ est défini par le lemme ci-dessus, à partir de $\leq_{\mathbb{L}_\alpha}$,
- Pour λ limite, $\leq_{\mathbb{L}_\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \leq_{\mathbb{L}_\alpha}$.

Et finalement, on pose $\leq_{\mathbb{L}} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \leq_{\mathbb{L}_\alpha}$.

On vérifie aisément que chaque $\leq_{\mathbb{L}_\alpha}$ est un bon ordre sur $\mathbb{L}_\alpha$ et que la classe $\mathbb{L}$ est bien ordonnée par $\leq_{\mathbb{L}}$. Et donc a fortiori, $\mathbb{L} \models AC$ •

Cohérence de HGC

On montre en outre - cf [Jech] par exemple -qu'on a la

Proposition $\mathbb{L}$ vérifie l'hypothèse génŕalisée du continu : HGC, c'est-à-dire que pour tout ordinal $\alpha, \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Idée de la démonstration : On raisonne dans $\mathbb{L}$. Soit $\aleph_\alpha$ un cardinal infini - le α-ème. Et soit $A \subset \aleph_\alpha$. Alors il existe un ordinal β tel que $A \in \mathbb{L}_\beta$ et on peut supposer que $\aleph_\alpha \leq \beta$. Sans rentrer dans les détails, disons simplement que par une propriété dite de réflexion, β peut aussi être choisi tel que $\mathbb{L}_\beta \models \mathbb{V} = \mathbb{L}$ - i.e. du point de vu de $\mathbb{L}_\beta$, tous ses éléments sont constructibles.
Soit alors par le théorème d Löwenheim-Skolem descendant, une sous- structure élémentaire N de $\mathbb{L}_\beta$ qui contient $\aleph_\alpha$ et l'élément A, tel que $Card(N) = \aleph_\alpha$. On peut alors montrer qu'il existe un M transitif isomorphe à N et contenant lélément A. On peut alors montrer qu'un tel M transitif, vérifiant $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, est nécessairement de la forme $\mathbb{L}_\gamma$. Mais alors on a :
$Card(\gamma) = Card(\mathbb{L}_\gamma) = Card(N) = \aleph_\alpha$
Ainsi, $\gamma < \aleph_{\alpha+1}$, et $A \in \mathbb{L}_\gamma$.
En appliquant ce raisonnement pour tout A comme ci-dessus, on voit que $P(\aleph_\alpha) \subset \mathbb{L}_{\aleph_{\alpha+1}}$. Mais comme $\aleph_{\alpha+1} = Card(\aleph_{\alpha+1}) = Card(\mathbb{L}_{\aleph_{\alpha+1}})$, on a bien que $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$•

1.2 Forcing

1.2.1 Introduction: indépendance de HC et AC

Des résultats précédents, on déduit que AC et HC ne sont pas réfutables par ZF. Mais sont-ils démontrables à partir de ZF? Autrement dit, est-ce que dans tout univers - modèle de ZF -, AC et HC sont vraies? La réponse est non. C'est-à-dire que s'il exite un modèle de ZF, on peut en construire un qui vérifie $\neg AC$, et un autre qui vérifie $\neg HC$. Cela a été rendu possible grâce à la méthode du *forcing* due à *Paul Cohen* dans les années 1960. Cette technique n'étant pas forcément simple à comprendre tout de suite, on se contentera ici de quelques idées générales.

1.2.2 Initiation au forcing

L'idée du forcing, est de rajouter à un univers $\mathbb{V}$, modèle de ZF, un objet extérieur G, et de considŕé en un sens l'univers "engendré" par $\mathbb{V}$ et G, que l'on notera $\mathbb{V}[G]$, et qui sera encore un modèle de ZF, le plus petit contenant $\mathbb{V}$ et G. C'est une opération analogue à celle qui consiste, à partir d'un anneau A de considérer l'anneau $A[b]$ engendré par A et b, où b n'appartient pas à A. Ainsi, intuitivement, pour trouver un modèle de ZF, qui niera l'hypothèse du continu, Cohen a eu l'idée, à partir d'un modèle quelconque $\mathbb{V}$ de ZF, de lui rajouter un ensemble suffisamment gros de réels pour nier HC.

Filtres génériques.
Techniquement, l'objet extérieur G que l'on rajoute sera un *filtre générique* d'un ensemble ordonné

partiellement (o.p.) noté $(\mathbb{P}, <)$ qui appartient lui au modèle de base $\mathbb{V}$ - contrairement à G.

Définition Soit $(\mathbb{P}, <) \in \mathbb{V}$ un ordre patiel, et $G \subset \mathbb{P}$. On dit que G est un filtre $\mathbb{P}$-générique sur $\mathbb{V}$, si on a les conditions suivantes:
i) G est non vide.
ii) Pour tout $p, q \in \mathbb{P}$, si $p \in G$, et $p < q$, alors, $q \in G$.
iii) Pour tout $p, q \in \mathbb{P}$, si $p \in G$, et $q \in G$, alors, il existe un $r \in G$ tel que $r \leq p$ et $r \leq q$.
iv) Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{P}$ dense dans $\mathbb{P}$, qui est dans $\mathbb{V}$, $\mathbb{P} \cap A$ est non vide.

où:
Définition $A \subset \mathbb{P}$ est dense dans $\mathbb{P}$ si pour tout $p \in \mathbb{P}$, il existe $a \in A$ tel que $a \leq p$.

On peut alors montrer qu'à partir d'un tel couple $(\mathbb{V}, G)$, où $\mathbb{V}$ est un modèle de ZF (resp. ZFC), et G est un ultrafiltre $\mathbb{P}$-générique sur $\mathbb{V}$, pour un ensemble partiellement ordonné $(\mathbb{P}, <) \in \mathbb{V}$ donné, on peut construire $\mathbb{V}[G]$, modèle engendré de ZF (resp. ZFC).

$\mathbb{P}$-noms.
Dans $\mathbb{V}$, à partir d'un ensemble partiellement ordonné $(\mathbb{P}, <) \in \mathbb{V}$, on va considérer certains objets: des $\mathbb{P}$-noms, qui suffiront pour engendrer $\mathbb{V}[G]$. Ce sont des noms abstraits que l'on viendra interpréter par G pour obtenir $\mathbb{V}[G]$.
Pour reprendre la comparaison avec la théorie des anneaux, à partir d'un anneau A, on peut considérer un ensemble de noms abstraits : l'ensemble des polynômes sur A : $A[X]$. Pour construire l'extension $A[b]$, il suffit alors d'interpréter chaque nom - polynôme - $P(X)$ par $P(b)$.
La classe des $\mathbb{P}$-noms est définies par induction sur le rang et est notée $\mathbb{V}^{\mathbb{P}}$:
- $\varnothing \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}$,
- tout ensemble partie de $\mathbb{V}^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P} \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}$.

Ainsi par exemple, pour tous $p, q \in \mathbb{P}, \tau = \{(\varnothing, p); (\varnothing, q)\}$ est un $\mathbb{P}$-nom. $\tau' = \{(\varnothing, p); (\tau, p); (\tau, q)\}$ est aussi un $\mathbb{P}$-nom.

A partir d'un $\mathbb{P}$-nom τ et d'un filtre générique G, on peut alors définir par induction sur le rang de τ un nouvel objet appelé interprétation de τ par G, et noté τ^G:
- $\varnothing^G = \varnothing$
- $\tau^G = \{\sigma^G : \exists p \in G$ tel que $(\sigma, p) \in \tau\}$.

On pose alors $\mathbb{V}[G] = \{\tau^G : \tau \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}}\}$

Il faut noter qu'en fait l'existence de tels filtres ne pose pas de problème dans la pratique. cf par exemple [Kunen] ou [Jech]

Et on a, comme annoncé, le

Théorème Soit $\mathbb{V}$ un modèle - transitif - de ZF (resp. ZFC). Soient $\mathbb{P} \in \mathbb{V}$ un ordre partiel, et G un filtre $\mathbb{P}$-générique au dessus de $\mathbb{V}$. Alors,
i) $\mathbb{V}[G]$ est un modèle de ZF (resp. ZFC),
ii) $\mathbb{V} \cup \{G\} \subset \mathbb{V}[G]$,

iii) $\mathbb{V}[G]$ et $\mathbb{V}$ ont les mêmes ordinaux, et
iv) Si $\mathbb{M}$ est un modèle transitif de ZF (resp. ZFC) tel que $\mathbb{V} \cup \{G\} \subset \mathbb{M}$ et qui a les mêmes ordinaux que $\mathbb{V}$, alors $\mathbb{V}[G] \subset \mathbb{M}$

On peut alors exhiber un modèle de $ZF + \neg HC$ grace au forcing.

1.2.3 Indépendance de HC

Théorème S'il existe un modèle de ZF, alors il en existe un de $ZF + \neg HC$.

Démonstration: Soit $\mathbb{V}$ un modèle quelquonque de ZF. Dans $\mathbb{V}$, on considère l'ensemble $\mathbb{P}$ des fonctions partielles de $\aleph_2 \times \omega$ dans ω. C'est-à-dire que $p \in \mathbb{P} \leftrightarrow dom(p) \subset \aleph_2 \times \omega$, et est fini, et $Im(p) \subset \omega$. On ordonne alors $\mathbb{P}$ par inclusion inverse, i.e. $p \leq q \leftrightarrow dom(q) \subset dom(p)$ et p prolonge q.
Soit G un filtre $\mathbb{P}$-générique au dessus de $\mathbb{V}$. Dans $\mathbb{V}[G]$, on peut considérer la réunion des fonctions partielles $\bigcup_{p \in G} p = f$. On peut alors montrer que f est en fait une fonction de $\aleph_2 \times \omega$ dans ω. Cette fonction en induit canoniquement une autre g de $\aleph_2$ dans ω^ω - $g(x) = f(x, .)$.
Or en fait g sera injective, ce qui prouvera que d'un point de vue des cardinaux, $\aleph_2 \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. HC sera donc contredite.

Lemme f est bien une fonction définie sur $\aleph_2 \times \omega$ tout entier.

Démonstration: Pour tout $u \in \aleph_2 \times \omega$, soit $A_u = \{p \in \mathbb{P} : u \in dom(p)\}$. Il est facile de voir que A_u est un ensemble dense dans $\mathbb{P}$. En effet, pour tout $p \in \mathbb{P}$ tel que u n'appartient pas à $dom(p)$, il est toujours possible de trouver un q dans A_u qui prolonge p. Mais alors comme G est générique, $G \cap A_u$ est non vide. Et donc $u \in dom(f)$.
Montrons maintenant que f est bien une fonction, autrement dit qu'elle est fonctionnelle. Soient n et m deux entiers distincts. S'il existait u tel que $f(u) = n$ et $f(u) = m$, alors il existerait dans G, p et q tels que $u \in dom(p) \cap dom(q)$ tel que $p(u) = n$ et $q(u) = m$. Mais comme G est un filtre, il existerait un $r \in G$ prolongement commun de p et q. Or cela est impossible puisque r est une fonction et que l'on aurait simultanément $r(u) = n$ et $r(u) = m\bullet$

Lemme La fonction g de $\aleph_2$ dans ω^ω définie par $g(x) = f(x, .)$, est injective.

Démonstration: Pour tous $x, y \in \aleph_2$, on pose $A_{x,y} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega$ tel que (x, n) et $(y, n) \in dom(p)$ et tel que $p(x, n) \neq p(y, n)\}$. On vérifie alors facilement que $A_{x,y}$ est dense dans $\mathbb{P}$. Il existe donc un $p \in G \cap A_{x,y}$, car G est générique. On a donc $f(x, n) \neq f(y, n)$. D'où le résultat $\bullet$

NB Attention, pour terminer la démonstration du théorème il faut prêter garde au fait que $\aleph_2$ ne soit pas "détruit" par le forcing. Dans $\mathbb{V}$ on a en effet un ordinal α qui se trouve être le deuxième cardinal non dénombrable - $\aleph_2$. On sait que par forcing, un ordinal dans $\mathbb{V}$ reste un ordinal dans $\mathbb{V}[G]$. Mais reste-t-il un cardinal? et encore de même hauteur? Dans certains cas de forcing - pour certains $\mathbb{P}$ - on rajoute avec G une injection de α dans un ordinal strictement plus petit. Vu dans $\mathbb{V}[G], \alpha$ n'est donc plus un cardinal.

En fait le $\mathbb{P}$ que l'on a considéré ici vérifie une propriété combinatoire particulière - la condition de chaine dénombrable - qui implique que dans toute extension générique $\mathbb{V}[G]$, $\aleph_0, \aleph_1$ et $\aleph_2$ restent des cardinaux. cf par exemple [Kunen]. Il n'y adonc pas de problème $\bullet$

1.2.4 indépendance de AC

Ici encore, on a un théorème du type:

Théorème S'il existe un modèle de ZF, alors il en existe un de $ZF + \neg AC$.

Sans rentrer dans les détails, disons qu'à partir d'un modèle $\mathbb{V}$ de ZF, on prend son modèle interne des constructibles : $\mathbb{L}$. Ensuite, il faut forcer au dessus de $\mathbb{L}$ par un certain $\mathbb{P}$. On obtient alors une extension générique $\mathbb{L}[G] = N$. Et enfin dans N, on considère un certain ensemble C, et il faut prendre dans N le modèle interne $\mathbb{L}(C) = M$ - le plus petit contenant $\mathbb{L}$ et C. On peut alors montrer que $M \models ZF + \neg AC \bullet$

1.2.5 Bilan

La théorie des ensembles se revèle donc fortement incomplète. C'est-à-dire que voulant décrire le fondement des mathématiques, on trouve des questions insolubles déductivement. Faut-il imposer que l'axiome du choix est vrai pour pouvoir l'utiliser librement? Faut-il au contraire considérer qu'il est trop fort? Les mêmes questions se posent pour HC, et encore d'autres axiomes.
Les axiomes sont souvent présentés comme des assertions non démontrables, mais qui paraissent évidentes, ou en tout cas bien adaptée pour décrire tel ou tel objet. En réalités, ces évidences sont surtout subjectives. Dès le début de la théories des ensembles, il y a eu des controverses pour savoir quels axiomes choisir. Concernant l'axiome du choix par exemple, on sait que Vitali l'a utilisé en 1905 pour construire un ensemble de réels non mesurable. Mais pour Lebesgue à cette époque, qui avait posé le problème de l'existence d'une mesure totale sur $\mathbb{R}$ tout entier, le résultat de Vitali ne mettait pas tant en cause l'existence d'une telle mesure que l'axiome du choix lui-même.
Pourquoi ne pas considérer en effet que le bon cadre pour faire des mathématiques est un univers dans lequel AC est faux, mais où *tout ensemble de réels est mesurable ?* . Une telle situation est tout à fait possible. A la fin des années 60, Solovay en utilisant le forcing et un grand gardinal a pu construire un modèle de ZF+*tout ensemble de réels est mesurable* . Un tel modèle ne vérifie pas AC bien sûr, mais il dispose quand même d'un choix relativement fort: le principe des choix dépendants DC.
La théorie des grands cardinaux s'est développée peu à peu au cours du XXème siècle. Elle constitue aujourd'hui une branche majeure de la théorie des ensembles.

1.3 Grands cardinaux

Pour aborder les grands cardinaux, on va commencer par présenter la notion de cardinal inaccessible.

Définition Soit λ un cardinal infini non dénombrable. On dit qu'il est inaccessible si :
1) Pour tout ordinal $\beta < \lambda$ et pour toute suite $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\beta}$ d'ordinaux tous plus petits strictement que λ, on a $Sup\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\beta} < \lambda$
2) Pour tout cardinal $\kappa < \lambda, 2^\kappa < \lambda$.

On remarque que $\aleph_0$ vérifie les propriét'es 1) et 2). On ne peut pas obtenir $\aleph_0$ par des opérations simples - Sup et ensemble des parties - à partir des entiers finis. Il s'agit donc d'une extension de ces propriétés à des cardinaux non dénombrables.
D'une manière générales, les grands cardinaux sont de tels cardinaux qui ont les mêmes propriétés de transcendance - relativement aux ordinaux plus petits -que $\aleph_0$, mais qui sont non dénombrables.
Au delà des cardinaux inaccessibles, on peut définir des cardinaux encore plus grands: les compacts, les mesurables, les supercompacts... On dits qu'ils sont plus grands au sens où par exemple, tout cardinal compact sera nécessairement inaccessible.
On peut alors se demander si de tels cardinaux existent. Or par le second théorème d'incomplétude de Gödel, qui implique que l'on ne peut pas déduire de ZF l'existence d'un modèle de ZF, on montre facilement qu'il est en fait impossible de démontrer qu'il existe un cardinal inaccessible λ - à partir de ZF. Sinon on pourrait montrer que $\mathbb{V}_\lambda$ est un modèle de ZF, et donc contredire le second théorème d'incomplétude de Gödel.
Les axiomes de grands cardinaux qui en postulent l'existence sont donc non démontrables à partir de ZF. On peut donc choisir de travailler dans un univers qui possède un grand cardinal, car cela implique des propriétés remarquables, nottemment concernant les réels, mais on peut aussi se l'interdire. Choisir l'existence de grands cardinaux, c'est en un sens un choix ontologique fort qui vient s'opposer au choix du constructible. On montre en effet le

Théorème Si $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ alors, il n'existe pas de cardinal mesurable dans $\mathbb{V}$.

Pour les grands cardinaux, cf [Jech] ou [Kanamori].

Choisir le modèle $\mathbb{L}$ des constructibles, c'est choisir une ontologie plus raisonnable en un sens, et bénéficier de toute la puissance de l'axiome du choix. Mais cela implique de rendre possible la présence d'ensemble de réels “pathologiques” - cf le résultat de Vitali déjà évoqué. Choisir les grands cardinaux permet au contraire d'assurer des bonnes propriétés de régularité pour les réels. Ainsi par exemple, comme on l'a déjà dit, Solovay a démontré le résultat suivant:

Théorème Si $\mathbb{V} \models ZFC$+il existe κ cardinal inaccessible, alors on peut trouver un modèle de $ZF + DC$+tout ensemble de réels est mesurable.

Pour construire un tel modèle, on peut partir d'un certain ensemble partiellement ordonné de $\mathbb{V}$, pour obtenir une extension générique de $\mathbb{V}$: $\mathbb{V}[G]$. Ensuite il faut prendre dans $\mathbb{V}[G]$ le modèle interne $\mathbb{L}(\mathbb{R})$: le plus petit qui contienne $\mathbb{L}$ et $\mathbb{R}$. On obtient alors bien un modèle N de $ZF + DC$+tout ensemble de réels est mesurable.