Introduction à la théorie des ensembles*

Paris, 2002

1 Introduction

1.1 Enjeux

L'enjeu de la théorie des ensembles est de s'intéresser aux fondements des mathématiques. Un fondement est quelque chose de premier qui justifie en raison ce qu'il fonde. Tous les objets mathématiques usuels (un nombre entier, un nombre complexe, un triangle isocèle, une fonction, un groupe abélien...) sont des ensembles particuliers. La théorie des ensembles s'occupe donc des propriétés des ensembles, c'est-à-dire de l'univers constitué de tous les objets mathématiques usuels. Une propriété simple est par exemple qu'à partir de deux ensembles A et B, on peut former leur union $C = A \cup B$.

1.2 Historique

Historiquement, le fondateur de cette théorie a été Georg Cantor. En étudiant les points de convergence des séries de Fourier, il en vient à s'intéresser aux ensembles de réels pour eux-mêmes. La théorie des ensembles naît en 1873 quand Cantor démontre que l'ensemble de tous les réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (i.e : il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$).
Cantor formule alors **l'hypothèse du continu** (HC) qui affirme que *tout ensemble infini de réels est soit dénombrable, soit en bijection avec $\mathbb{R}$.* La théorie des ensembles commence donc par une théorie de l'infini. A cette époque, Cantor n'arrive pas à prouver HC, au point qu'Hilbert l'inscrive comme le premier problème de sa liste exposée en 1900.

1.3 Axiomatisation

Au début du XX^e siècle, on commence à vouloir axiomatiser la théorie des ensembles tout comme on axiomatise la géométrie ou l'arithmétique. Après maturation (de 1908 à environ 1930), la forme standard acceptée est la théorie de **Zermelo-Fraenkel** (ZF), que nous présenterons. C'est une théorie du premier ordre pour le langage $L = \{\in\}$ où $\in$ est un symbole de relation binaire.

2 Axiomes de la théorie des ensembles

Mathématiquement, la *théorie des ensembles* apparaît comme la donnée d'un ensemble d'énoncés - ses axiomes- comme par exemple la théorie des groupes, des anneaux, des corps, de l'arithmétique... Les modèles de cette théorie -à supposer qu'il y en ait- sont appelés **univers** et sont souvent notés $\mathcal{U}$.

*Julien Page, Équipe de logique mathématique, Université Paris 7 - C.N.R.S.

Ainsi à proprement parler, il faudrait nommer cette théorie, **théorie des univers**, les **ensembles étant représentés par les éléments de cet univers**. D'un point de vue catégorique, un tel univers $\mathcal{U}$ peut être vu comme *la* catégorie des ensembles Set - cf. annexe 2-. Mais à proprement parler, il faudrait dire *une* catégorie des ensembles.

2.1 Présentation de ZF

Comme il a été dit, le langage L considéré est constitué d'un seul symbole, noté usuellement $\in$ de relation binaire. Ce symbole est censé décrire l'appartenance ensembliste.

Abréviation 1 (inclusion). On abrège la formule $F[x, y]$ à 2 variables libres

$$\forall t \ \ (t \in x \ \rightarrow \ t \in y)$$

par $x \subset y$.

Abréviation 2 (fonctionnalité). Soit $F[x, y, a_1, ..., a_n]$ une formule à $n + 2$ variables libres ; on remplace la formule $H[a_1, ..., a_n]$ à n variables libres

$$\forall x \ \ \forall y_1 \ \ \forall y_2 \ \ ((F[x, y_1, a_1, ..., a_n] \ \wedge \ F[x, y_2, a_1, ...a_n]) \ \rightarrow \ y_1 = y_2)$$

par "$F[., ., a_1, ..., a_n]$ est fonctionnelle en x".

Voici la liste des axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel:

1) Axiome d'extensionnalité.

$\forall x \ \ \forall y \ \ ((x \subset y \ \wedge \ y \subset x) \ \rightarrow \ x = y)$

i.e 2 *ensembles* qui ont les mêmes *éléments* sont égaux.

2) Axiome de la paire.

$\forall a \ \ \forall b \ \ \exists p \ \ \forall t \ \ (t \in p \ \leftrightarrow \ (t = a \ \vee \ t = b))$

i.e qu'étant donnés 2 *ensembles* a et b, il existe un *ensemble* p, unique par extensionnalité, tel que $p = \{a, b\}$.
On remarque que $\{a, b\} = \{a', b'\}$ si et seulement si $(a = a'$ et $b = b')$ ou $(a = b'$ et $b = a')$.

3) Axiome de la réunion.

$\forall x \ \ \exists U \ \ \forall s \ \ (s \in U \ \leftrightarrow \ \exists t \ \ (t \in x \ \wedge \ s \in t))$

i.e étant donné un *ensemble* x, que l'on peut considérer comme la famille des *éléments* lui *appartenant*, il existe un *ensemble* $U = \cup x$, unique par extensionnalité, défini par $\cup x = \bigcup_{t \in x} t$.

3) Axiome des parties.

$\forall x \ \ \exists P \ \ \forall t \ \ (t \in P \ \leftrightarrow \ t \subset x)$

i.e étant donné un *ensemble* x, il existe un *ensemble* $P = \mathcal{P}(x)$, unique par extensionnalité, dont les *éléments* sont exactement les *parties* de x, c'est-à-dire ceux *inclus* dans x.

4) Schéma d'axiomes de remplacement.

Pour toute formule à $n+2$ variables libres $F[x, y, a_1, ..., a_n]$:
$\forall X \quad \forall a_1 \; ... \; \forall a_n \quad ((F[.,., a_1, ..., a_n] est\ fonctionnelle\ en\ x) \rightarrow \exists Y \quad \forall t \quad (t \in Y \leftrightarrow \exists a \quad (a \in X \wedge F[a, t, a_1, ..., a_n])))$

i.e étant donné un *ensemble* X et une formule fonctionnelle $F[x, y]$ (les autres variables étant à considérer comme des paramètres de l'univers), alors il existe un *ensemble* Y, qui *vérifie*
$Y = \{t \; ; \; \exists a \in X \quad F[a, t]\}$.

5) Axiome de l'infini.

il existe un ensemble infini

Cet axiome ne peut être correctement énoncé pour l'instant, la notion même d'infini faisant défaut; ainsi on l'explicitera par la suite, grâce aux ordinaux. Jusque-là, il ne servira pas. (On peut ainsi concevoir qu'il n'existe pas d'ensemble *infini*)

2.2 Conséquences

2.2.1 le schéma de compréhension

On appelle **schéma de compréhension** l'ensemble des énoncés suivants:
$\forall X \quad \forall a_1 \; ... \; \forall a_n \quad \exists Y \quad \forall t \quad (t \in Y \leftrightarrow (t \in X \wedge F[t, a_1, ... a_n]))$
Pour toute formule $F[x, a_1, ..., a_n]$ à $n+1$ variables.

En d'autres termes, l'ensemble $\{t \; ; \; t \in X \wedge F[t, a_1, ..., a_n]\}$, noté aussi $\{t \in X \; ; \; F[t, a_1, ..., a_n]\}$ existe (les variables $a_1, ..., a_n$ sont à considérer comme des paramètres de l'univers).

Proposition 1 *(schéma de compréhension). ZF démontre le schéma de compréhension.*

Démonstration: Soit $F[x, a_1, ..., a_n]$ une formule à $n+1$ variables libres et X un ensemble, on pose $H[x, y, a_1, ..., a_n] \equiv (x = y) \wedge F[x, a_1, ..., a_n]$. H est fonctionnelle en x, donc d'après le schéma de remplacement, l'ensemble $\{t \in X \; ; \; F[t, a_1, ..., a_n]\} = [t \; ; \; \exists a \in X \quad H[a, t, a_1, ..., a_n]\}$ existe. □

2.2.2 Objets usuels

Proposition 2 *(existence du vide). ZF démontre qu'il existe un ensemble qui ne contient aucun élément et qui est unique : on l'appellera ensemble vide et on le notera $\emptyset$.*
($ZF \models \exists! \; v \quad \forall x \quad \neg (x \in v)$)

Démonstration: On considère la formule $F[x] \equiv \neg (x = x)$. D'après la compréhension, on a que ZF démontre $\forall a \quad \exists v \quad \forall t \quad (t \in v \leftrightarrow (t \in a \wedge \neg (t = t)))$. Or, quel que soit l'ensemble a, il n'existe pas d'ensemble satisfaisant la formule $(t \in a \wedge \neg (t = t))$. Il y a donc un ensemble qui ne possède aucun élément (car l'univers n'est pas vide). Par extensionnalité, cet ensemble est unique. □

Proposition 3 *(singleton). Soit a un ensemble, alors ZF prouve qu'il existe un unique ensemble noté $\{a\}$ et appelé singleton tel que a soit son seul élément. ($ZF \models \forall a \quad \exists! \; b \quad \forall t \quad (t \in b \leftrightarrow t = a)$)*

Démonstration: Soit par compréhension avec la formule $F[x] \equiv x = a$ en restreignant cette formule à $\mathcal{P}(a)$, soit en utilisant l'axiome de la paire en posant $b = a$. $\square$

Exemple. En utilisant la remarque de l'axiome de la paire, on a que $\{a\} = \{b\} \leftrightarrow a = b$.

Proposition 4 *(intersection). Comme pour la réunion, on peut définir l'intersection: soit a un ensemble non vide, il existe un unique ensemble dont les éléments sont les ensembles qui appartiennent à tous les éléments de a. on le note* $\cap a$ *et donc* $\cap a = \bigcap_{t\in a} t$.

Démonstration: on applique la compréhension avec la formule $F[x] \equiv \forall t \quad (t \in a \rightarrow x \in t)$ en restreignant cette formule à un ensemble-élément de a (c'est pour cela que a ne doit pas être vide). $\square$

Exemple. On peut ainsi définir la réunion et l'intersection de 2 ensembles a et b; en effet, grâce à l'axiome de la paire, on peut considérer l'ensemble $\{a, b\}$ formé uniquement de ces 2 ensembles. On a alors $a \cup b = \cup\{a, b\}$ et $a \cap b = \cap\{a, b\}$.

Proposition 5 *(complémentaire et différence symétrique): ZF démontre l'existence du complémentaire et de la différence symétrique.*
$\star$ *Complémentaire:* $ZF \models \forall x \quad \forall y \quad (y \subset x \rightarrow \exists!\ a \quad (a \subset x \wedge a \cap y = \emptyset \wedge a \cup y = x))$
$\star$ *Différence symétrique:* $\forall x \quad \forall y \quad \exists!\ d \quad (d \subset x \cup y \wedge d =$ *complémentaire dans* $x \cup y$ *de* $x \cap y)$

On peut aussi construire d'autres opérations de base sur les ensembles telles que les couples, les réunions disjointes, les produits cartésiens...

Définition 6 . *Soient 2 ensembles a et b, l'ensemble* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ *est noté* (a, b) *et est apelé le couple* (a, b).

Proposition 7 . *Soient a,a',b et b' 4 ensembles, ZF démontre* $(a, b) = (a', b') \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')$.

Démonstration: on distingue 2 cas.
Cas 1: $a = b$, alors $\{\{a'\}, \{a', b'\}\} = (a, b) = \{\{a\}\}$. Par conséquent, $\{a', b'\} \in \{\{a\}\}$. Donc $\{a', b'\} = \{a\}$; on obtient ainsi $a = a' = b'$.
Cas 2: $a \neq b$, alors $\{a'\} \neq \{a, b\}$; donc $\{a'\} = \{a\}$ et $a' = a$. D'autre part, $\{a, b\} = \{a', b'\}$ et $b = b'$. $\square$
Par (méta)récurrence, on peut alors définir: $(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) := (a_1, (a_2, ..., a_{n+1}))$.

Proposition 8 *(produit cartésien) Soient a et b deux ensembles, ZF démontre qu'il existe un unique ensemble constitué exactement des paires* (t, s) *telles que* $t \in a$ *et* $s \in b$. *Cet ensemble est noté* $a \times b$ *et est appelé le produit cartésien de a et b.*

Démonstration:$a \times b = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))\ ;\ \exists t \quad \exists s \quad (x = (t, s) \wedge t \in a \wedge s \in b)\}$. Cet ensemble est unique par extensionnalité. $\square$
Par (méta)récurrence, on peut alors définir: $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{n+1} := (a_1 \times (a_2 \times ... \times a_{n+1}))$.

On peut alors traduire dans le langage de la théorie des ensembles, toutes les notions de relation, application... Une relation binaire sur a et b, sera un sous ensemble de $a \times b$. Une application de a dans b, sera une relation *fonctionnelle* sur a et b. On définit alors facilement les notions d'injection, de surjection...

2.3 Ensembles et classes

Dans le schéma de compréhension, on définit des ensembles de la forme $\{t \in x \; ; \; F[t, a_1, ..., a_n]\}$; pourquoi ne pas avoir permis de définir des objets de la forme $\{t \; ; \; F[t, a_1, ..., a_n]\}$?
En fait si on autorise de telles constructions, en considérant la formule $F[x] \equiv x \notin x$, on aurait l'existence d'un ensemble a tel que pour **tout** ensemble b:

$$b \in a \leftrightarrow b \notin b$$

En particulier, pour b=a, on obtient:

$$a \in a \leftrightarrow a \notin a$$

ce qui est contradictoire.
Conceptuellement, ceci revient à se demander s'il existe un ensemble a dont les éléments sont les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Ce paradoxe est connu sous le nom de **paradoxe de Russell**; il est donc *résolu* par la restriction imposée dans le schéma de compréhension. Ceci permet d'établir la différence entre **classes** et **ensembles**:
⋆ les ensembles sont les éléments d'un modèle de ZF.
⋆ les classes sont les parties définissables d'un modèle de ZF.
Un ensemble est ainsi une classe mais une classe n'est pas forcément un ensemble. Par contre, grâce à la compréhension, la restriction d'une classe à un ensemble est un ensemble.

Théorème 9 *Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles mais il existe une classe contenant tous les ensembles.*

Démonstration:
⋆ soit $\mathcal{U}$ un modèle de ZF; on veut montrer $\mathcal{U} \models \neg \exists a \;\; \forall x \;\; x \in a$. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble a qui contienne tous les ensembles ($\mathcal{U} \models \forall x \;\; x \in a$); appliquons alors le schéma de compréhension avec la formule $F \equiv x \notin x$ restreinte à a. On obtient un ensemble b tel que

$$\forall x \;\; (x \in b \leftrightarrow x \notin x)$$

ce qui mène à une contradiction, lorsque $x = b$.
⋆ on considère la formule $F \equiv x = x$, alors tous les ensembles, en tant qu'éléments d'un modèle satisfont F. Ainsi, il existe une classe contenant tous les ensembles.

2.4 Axiome du choix

Dans de nombreux domaines des mathématiques, on utilise souvent un autre axiome, non explicité dans ZF, **l'axiome du choix** (AC). Il est utile pour démontrer l'existence d'une base dans un espace vectoriel de dimension infinie, pour démontrer le théorème de Hahn-Banach, ou encore le théorème de Krull.

Définition 10 *(Axiome du Choix). Pour tout ensemble non vide E, il existe une* **application** *$f : \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $f(x) \in x$.*
L'application f est appelée **fonction de choix**.

Dans le cas où E est fini, ceci est évident, mais rien ne prouve a priori (du point de ZF) que cela soit vrai pour un ensemble E quelconque. On verra d'ailleurs à la fin du cours que (AC) est indécidable à partir de ZF (i.e $ZF \not\models AC$ et $ZF \not\models \neg AC$).
Il existe des formulations équivalentes de l'axiome du choix.
1) Produit infini.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'ensembles non vides, alors $\prod_{i \in I} E_i$ est non vide.
2) Théorème de Zermelo.
Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.
3) Lemme de Zorn.
Tout ensemble partiellement ordonné inductif $(E, \leq)$, c'est-à-dire que toute chaîne de E admet un majorant, possède un élément maximal.

Mais il existe aussi des axiomes de choix plus *faibles* que (AC) qui permettent déjà de faire une partie des mathématiques usuelles.
1) Axiome de l'ultrafiltre (AU).
Dans une algèbre de Boole, tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

Nota Bene. Une algèbre de Boole est un anneau unitaire tel que pour tout élément x, $x.x = x$. Les filtres sont les images des idéaux par la bijection $x \longmapsto 1 - x$.
2) Axiome du Choix Dépendant (CD).
Soit un ensemble $(E, <)$ ordonné dont l'ordre est mal fondé; alors il existe un ensemble dénombrable $\{e_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N} \ \ e_{i+1} < e_i$.
3) Axiome du Choix Dénombrable (AC_ω).
Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille non vide **dénombrable** d'ensembles non vides alors $\prod_{i \in I} E_i$ est non vide.

Proposition 11 . $(AC) \rightarrow (AU) \rightarrow (CD) \rightarrow (AC_\omega)$
De plus, ces implications sont strictes.

Exemples d'utilisation.
⋆ On n'a besoin que de l'axiome de l'ultrafiltre pour démontrer le théorème de compacité (d'ailleurs ce théorème est équivalent à (AU)).
⋆ Seul l'axiome du choix dénombrable est nécessaire pour obtenir une bonne partie de l'analyse réelle.
On remarquera que l'axiome du choix et toutes ses versions plus faibles ne sont utiles que dans des cas infinis; en effet, lorsqu'on ne travaille qu'avec des objets finis, les différents *choix* à faire ne posent pas de problème.

3 Annexes

3.1 La théorie des ensembles est-elle bien un fondement des mathématiques

Tel était bien le souhait de Cantor, mais cette question est philosophique et donc ouverte. La théorie des ensembles formalise en effet les objets primaires (= les ensembles) à partir desquels on peut faire les mathématiques usuelles. Elles en donne une présentation rigoureuse. Mais lorsque l'on fait de la théorie des ensembles, on fait des mathématiques. Cette activité d'étudier les objets primaires, n'est pas elle, primaire. Elle suppose toute l'habitude acquise par le mathématicien dans sa pratique: utiliser des raisonnement par récurrence, par l'absurde, se servir de résultats de la théorie des modèles... D'un point de vue philosophique, la question du fondement pose donc celle de la nature des mathématiques: les objets mathématiques sont-ils indépendants de l'activité mathématique qui les traite?

3.1.1 Deux niveaux

D'un point de vue mathématique, si l'on veut être sérieux, il faut bien distinguer deux niveaux.

Niveau 1. Les ensembles (qui sont censés engendrer toutes les mathématiques usuelles) sont notre objet d'étude.

niveau 2: niveau métamathématique. On étudie ces objets, mais avec des méthodes et des outils de notre pratique de mathématicien. Ainsi, au niveau 2, on écrit, $\mathbb{V} \models ZF$ ou $\mathbb{V} \models x \in y$. $\mathbb{V}$ est un modèle de ZF ou de $x \in y$. $\mathbb{V} = (\mathcal{U}, \in)$, où $\mathcal{U}$ est un **méta**-ensemble de base appelé univers et $\in$ sa **méta**-relation d'appartenance qui interprète le symbole binaire $\in$. Les *points* de $\mathcal{U}$ sont les *ensembles* qu'on étudie: des x et des y du premier niveau. x et y sont des ensembles du point de vue de $\mathbb{V}$, pas dans l'absolu. Un mathématicien usuel se place implicitement dans un modèle $\mathbb{V}$ de ZF ou ZFC pour travailler. Il peut ainsi travailler avec des entiers, des formules... bref, des ensembles de $\mathbb{V}$. Mais le théoricien des ensembles se place au niveau 2. Il utilise des méta-formules pour utiliser la théorie des modèles, des méta-entiers pour faire des raisonnements par récurrence. Ces méta-objets peuvent être vus comme des ensembles *naïfs* qui dans la pratique sont indentiques aux objets de $\mathbb{V}$: formules, entiers...

3.1.2 Paradoxes

Dans la pratique, on ne précise pas souvent la différence entre les deux niveaux, car cela serait fastidieux. Mais si on l'oublie, on peut être déconcerté par des paradoxes célèbres.

$\star$ **Paradoxe de Russell.**
Soit $\mathbb{V} \models ZF$; dans $\mathbb{V}$ on peut construire $A = \{x \in \mathbb{V} : x \notin x\}$ par compréhension. Mais alors, $A \in A \leftrightarrow A \notin A$!!!

$\star$ **Paradoxe de Skolem.**
Si ZF a un modèle $\mathbb{V}$, alors d'après le théorème de Lowenheim-Skolem descendant, ZF a un modèle dénombrable (qui contient les réels...)!!!

3.1.3 La crise des fondements

Ces paradoxes du début du XXème siècle illustrent l'état de crise d'une grande part des mathématiciens de cette époque qui se sont posés la question du fondement des mathématiques: Que sont les objets mathématiques? Qu' a-t-on le droit de faire en mathématiques?... Différentes écoles philosophico-mathématiques ont alors vu le jour: les **intuitionnistes** (Brouwer), les **formalistes** (Hilbert), les **logicistes** (Carnap)... La théorie des ensembles a été majoritairement acceptée par les mathématiciens comme répondant au problème des fondements des mathématiques. Mais depuis le milieu du XXème siècle, une autre réponse a vu le jour...

3.2 Fondement catégorique des mathématiques: la théorie des topoï

.

La théorie des catégories s'est peu à peu développée dans la seconde moitié du XXème siècle. Comme la théorie des ensembles, elle a pour ambition de donner un cadre général (un vocabulaire et des règles de base) sur lequel pourrait s'édifier les mathématiques usuelles. Ainsi, les fonctions ne sont plus vues comme des *ensembles* (de couples), mais comme des flèches (ou morphismes)

d'une catégorie.
Les injections sont vues comme des monomorphismes (i.e. simplifiable à gauche:
$\forall f, g \;\; i \circ f = i \circ g \;\rightarrow\; f = g$).
Les surjections comme des épimorphismes (simplifiables à droite).
L'ensemble vide, $\emptyset$, peut être vu comme un *objet initial* (i.e. un objet o t.q pour tout objet a, il existe une unique flèche de o dans a.
Dans le langage catégorique, le produit cartésien est un *produit* de deux objets a et b, c'est-à-dire la donnée d'un objet c et de deux flèches (les projections):
$p: \; c \longrightarrow a$ et $q: \; c \longrightarrow b$ caractérisées par la propriété universelle:
pour tous $p' : c' \;\longrightarrow a$ et $q' : c' \;\longrightarrow b$, il existe une unique $f: \; c' \longrightarrow c$ qui rende le diagramme associé commutatif: i.e $p' = p \circ f$ et $q' = q \circ f$.
De même à partir de a et b, on peut construire a^b et on a une flèche d'évaluation:
$ev \;:\; a^b \times b \longrightarrow a$, telle que $ev(f, x) = f(x)$.
Enfin, les sous-ensembles de a peuvent être caractérisés par leur fonction caractéristique
$\chi \;:\; a \longrightarrow 2$.
Mais rien ne prouve que l'on puisse faire tout cela dans une catégorie quelconque. Il faut au contraire se placer dans une catégorie qui dispose de produits, qui a un objet initial, une flèche évaluation... Pour faire de la logique catégorique, il faut se placer dans des catégories qui sont des **topoï** (pluriel de *topos*).

Définition 12 . *Une catégorie $(\mathcal{C})$ est un* **topos** *si:*

1) $\mathcal{C}$ a des limites et des colimites finies.

2) $\mathcal{C}$ a des exponentielles.

3) $\mathcal{C}$ a un classifieur de sous-objet: $1 \;\longrightarrow \Omega$

Proposition 13 . *La catégorie des ensembles $(\mathcal{S}et)$ est un topos.*

Nota Bene. En toute rigueur, il faudrait dire "une" catégorie des ensembles car de même qu'il y a plusieurs modèles de ZF (tout comme il y a plusieurs modèles de la théorie des groupes), on peut considérer qu'il y a plusieurs catégories des ensembles, certaines vérifiant l'axiome du choix, d'autres non.
Mais il y a d'autres topoï. Par exemple, si X est un espace topologique, la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, $(\mathcal{S}h(X))$ est aussi un topos.
Ainsi, dans chaque topos, on peut faire de la logique, *localement*. Or on peut démontrer que la logique d'un topos est a priori **intuitionniste** (i.e. le tiers-exclus: $F \vee \neg F$ n'est pas nécessairement vrai). Le tiers-exclus n'y est satisfait que si le topos est **booléen** (i.e. une certaine flèche $\neg \;:\; \Omega \longrightarrow \Omega$ dite de négation vérifie: $\neg \circ \neg = Id_\Omega$.)
Le topos $(\mathcal{S}et)$ par exemple est booléen. Ainsi, dans la théorie des topoï, la logique classique (i.e. qui vérifie le tiers-exclus) apparaît comme un cas particulier de la logique intuitionniste.

4 Bibliographie

• **Introduction élémentaire:**

R.Cori et D.Lascar, *logique mathématique, volume 2,* Masson, Paris 1993

• **Théorie des ensembles:**

J-L.Krivine, *Théorie des ensembles,* Cassini, Paris 1998
T.Jech, *Set Theory,* Academic Press, 1978
K.Kunnen, *Set Theory, an introduction to independence proofs,* North Holland, 1980

• **Théorie descriptive des ensembles:**

A.S.Kechris, *Classical descriptive set theory,* Springer-Verlag, 1994

• **Théorie des ensembles plus poussée:**

A.Kanamori, *The higher infinite,* Springer-Verlag, 1991

• **Fondation catégorique des mathématiques:**

R.Goldblatt, *Topoï, the categorical analysis of logic,* North Holland, 1975
S.Maclane et I.Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic, a first introduction to Topos Theory,* Springer-Verlag, 1992