Introduction à la théorie des ensembles*

Paris, 2002

1 Axiome du choix et induction transfinie

1.1 Induction transfinie

On va tout d'abord généraliser le principe de récurrence et d'induction, bien connu sur $\mathbb{N}$, aux ordinaux. On donnera une présentation de ces outils plus fonctionnelle que formelle.

La récurrence transfinie.

Soient α un ordinal et $P(\beta)$ une *propriété* (sous-entendu une formule) dépendant de $\beta \in \alpha$, éventuellement avec des paramètres, alors si

1) $P(0)$ est vraie

2) Pour tout $\beta \in \alpha \setminus \{0\}$ $(\forall \gamma < \beta \ \ P(\gamma) \textit{ est vraie}) \rightarrow P(\beta) \textit{ est vraie}$

Alors P est vraie sur α.

On vérifiera que ce principe généralise la récurrence sur les entiers.

Démonstration: On considère **l'ensemble** $X = \{\beta \in \alpha \ ; \ P(\beta) \ est \ fausse\}$. Si X est vide, la preuve est finie. Sinon on considère x_0, le plus petit élément de X (qui existe car $X \subset \alpha$, α est bien ordonné et $X \neq \emptyset$). Ainsi $P(x_0)$ est fausse. Or $x_0 \neq 0$ donc on peut appliquer 2): comme pour tout $\beta < x_0$, $P(\beta)$ est vraie, $P(x_0)$ est vraie; on obtient donc une contradiction.□

L'induction transfinie.

Oublions les ordinaux l'espace d'un instant. Plaçons nous dans $\mathbb{N}$ que nous connaissons mieux. Le principe de récurrence énoncé dans $\mathbb{N}$ est un outil bien connu que l'on utilise régulièrement et qui ne pose aucun problème à démontrer (en admettant que $\mathbb{N}$ est bien ordonné). Cependant, nous avons aussi l'habitude de faire des choses beaucoup plus complexes qu'on appelle "constructions" (ou encore "définitions") par récurrence. De quoi s'agit-il ? Et bien par exemple, considérons la suite définie par récurrence par :

1) $x_0 = 1$

2) $x_{n+1} = (n+1).x_n$

*Julien Page et Alexandre Rambaud, Équipe de logique mathématique, Université Paris 7 - C.N.R.S.

Personne ne doute qu'une telle suite existe et soit unique. Ce genre de construction est extrêmement naturel et courant.Pour les ordinaux c'est exactement la même chose. On ne va pas énoncer le principe général de construction par induction, car il est très technique et finalement inintéressant. Cependant, on admettra que l'on peut sans mal définir une "suite" (x_α) indexée sur les ordinaux et à valeurs dans une classe $\mathcal{C}$ en utilisant le système de construction suivant:

1) Je connais x_0

2) Pour tout ordinal α, si je suis arrivé à construire les x_β pour $\beta < \alpha$ alors je peux construire -et cela de façon systématique grâce à la donnée d'une formule- x_α

Exemple: On pose $\mathcal{C} = Ord$ et on considère une fonctionnelle f quelconque de Ord sur Ord; on construit, par analogie à l'exemple ci-dessus dans $\mathbb{N}$, la suite (x_α) suivante:

1) $x_0 = 0$

2.1) $x_{\alpha+1} = f(x_\alpha)$ (cas des ordinaux successeurs)

2.2) $x_\beta = \sup\limits_{\alpha<\beta}(x_\alpha)$ pour β limite (cas des ordinaux limites)

En fait cela ressemble beaucoup aux constructions par récurrence habituelles (d'ailleurs, on vérifiera que ce principe d'induction généralise bien celui sur $\mathbb{N}$). Ainsi, par exemple, les "suites" indexées sur Ord sont par analogie appelées suites transfinies.

1.2 Axiome du choix

L'Axiome du Choix et ses formes plus faibles sont des outils très utilisés en mathématiques et souvent sans le savoir. Ainsi, par exemple, une très grosse partie de l'analyse réelle est basée sur l'axiome du choix dénombrable. C'est justement ce que nous allons voir.

Axiome du Choix Dénombrable.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille non vide dénombrable d'ensembles non vides alors $\prod_{i\in I} E_i$ est non vide. On note cet axiome (AC$_\omega$).

Cet axiome de choix est central dans le théorème très classique suivant.

Théorème 1 . *Soit une partie X de $\mathbb{R}$; X est fermée si et seulement si X contient la limite de ses suites convergentes.*

(AC$_\omega$) intervient en effet pour prouver le sens le plus intéressant de ce théorème, c'est-à-dire que si X contient la limite de ses suites convergentes alors X est fermée.

Démonstration:
$\diamond$ X fermée $\rightarrow$ X contient la limite de ses suites convergentes.
Soit une suite (U_n) de X qui converge vers l alors:
$\forall\epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; U_n \in B(l, \epsilon)$

où $B(l,\epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre l et de rayon ϵ. Dès lors, si on considère une boule ouverte B de centre l, B contient un élément de (U_n), qui appartient à X. Ainsi l appartient à la clôture de X donc à X.
$\diamond$ X contient la limite de ses suites convergentes $\rightarrow$ X est fermée.
On va montrer que $\overline{X} \subset X$. Soit l dans $\overline{X}$, on a:
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists a \in B(l,\epsilon) \cap X$
On aimerait en déduire l'existence d'une suite à valeurs dans X qui converge vers l. **Or à ce niveau de la démonstration, aucun outil "usuel" des mathématiques ne permet de conclure une telle chose.** Cependant grâce à l'Axiome du Choix Dénombrable on peut arriver au résultat voulu. On considère la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{x \in B(l, \frac{1}{n}) \cap X\}$. On sait qu'aucun des E_n n'est vide et que la famille considérée est dénombrable; on peut donc appliquer l'Axiome du Choix Dénombrable. On en déduit l'existence d'une application $U : \mathbb{N}^* \longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} E_i$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U(n) \in E_n$. On obtient ainsi une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans X et qui converge vers l; dès lors l appartient à X.$\square$

Bien d'autres propriétés topologiques de $\mathbb{R}$ et, en fait, des espaces métriques, dépendent de l'Axiome du Choix Dénombrable. Par exemple, il implique que toute sous partie d'un espace métrique est séparable. De plus, il assure qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Remarque. On peut se demander si tous les espaces topologiques séparés, entre autres, vérifient ce théorème de clôture; on verra par la suite que ce n'est pas la cas.

Revenons sur les deux parties de la démonstration: on s'aperçoit que la différence principale entre celles-ci est que la première ne nécessite qu'un choix fini alors que la seconde oblige à trouver un processus systématique de choix. Cette différence est la raison d'être des axiomes de choix: **ils assurent l'existence de processus systématiques -automatiques- de choix**.

Exemples.
$\star$ Considérons la définition de l'Axiome du Choix utilisant la fonction de choix. Intuitivement, on est tenté de faire le raisonnement suivant: *Je veux construire une application f de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dans E telle que pour toute partie X non vide de E, $f(X) \in X$. Je considère donc une partie* **non vide** *X de E; comme celle-ci est justement non vide, elle possède au moins un élément, a. Il ne me reste plus qu'à associer à toutes les parties non vides de E* **leur** *élément ainsi trouvé.* Dans ce raisonnement, on a confondu 2 choses: d'un côté on a effectué un choix fini (je prends un ensemble qui est donc fixé et comme il est non vide, je prends un de ses éléments); puis d'un autre côté, on a voulu opérer un choix systématique: je veux un procédé qui me permette de choisir un élément dans **chaque** ensemble.
$\star$ Il existe des situations où on peut effectuer des choix infinis sans avoir recours à un axiome de choix; ainsi, par exemple, supposons qu'on veuille trouver une fonction de choix sur $\mathbb{N}$. D'après les propriétés de $\mathbb{N}$ si on considère une sous partie X de $\mathbb{N}$, elle possède un **unique** plus petit élément; il ne reste qu'à associer à X son plus petit élément.

1.3 Liens entre l'axiome du choix et l'induction transfinie

On va voir que l'Axiome du Choix et l'induction transfinie sont très intimement liés; en fait le Lemme de Zorn est souvent équivalent à Théorème de Zermelo + Induction transfinie. Usuellement, on élabore une preuve grâce à Théorème de Zermelo + Induction transfinie, car cette approche est plus constructive et intuitive et on rédige cette preuve en utilisant le Lemme de Zorn, car cette approche est plus condensée.

$\diamond$ **Lemme de Zorn**

Tout ensemble non vide partiellement ordonné inductif $(E, \leq)$, c'est-à-dire que toute chaîne de E admet un majorant, possède un élément maximal.

$\diamond$ **Théorème de Zermelo**

Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Pour établir le lien entre l'induction transfinie et l'Axiome du Choix, on va démontrer l'équivalence entre l'Axiome du Choix et le Théorème de Zermelo.

Démonstration:
$\diamond$ $(AC) \rightarrow (Zermelo)$
Soit E un ensemble non vide. D'après (AC) il existe une fonction de choix f sur E. On pose donc $x_0 = f(E)$ et on note $A_0 = \{x_0\}$. Dès lors, soit $E \setminus A_0$ est vide et dans ce cas la démonstration est terminée, soit $E \setminus A_0 \in Dom(f)$ et on pose $x_1 = f(E \setminus A_0)$. On note $A_1 = A_0 \cup \{x_1\}$. On recommence l'opération n fois, $n \in \mathbb{N}$. A la fin, soit, à un moment, un des A_i construits a été de complémentaire vide et on a pu terminer la preuve, soit on a construit 2 suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $A_{n+1} = A_n \cup \{x_{n+1}\}$ et $x_{n+1} = f(E \setminus A_n)$. Si $E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est vide alors on a fini la démonstration car on a réussi à mettre E et $\mathbb{N} = \omega$ en bijection. Supposons donc que $E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est non vide. On note par commodité $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On va continuer la construction des suites (A_n) et (x_n), démarrée sur $\mathbb{N}$, sur les ordinaux non finis. On pose ainsi $x_\omega = f(E \setminus B)$ et $A_\omega = B \cup \{x_\omega\}$. On recommence le raisonnement précédent: soit $E \setminus A_\omega$ est vide et on a construit une bijection entre E et $\omega + 1$.
On peut ainsi lancer la construction par induction de (A_α) et de (x_α).
Soit α un ordinal; on suppose qu'on a construit les A_β et x_β pour $\beta < \alpha$. On a donc:
$\diamond$ si $E \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ est vide, la preuve s'arrête car on réussi à mettre en bijection E et α
$\diamond$ sinon:
$\star$ si α est un ordinal successeur c'est-à-dire si $\alpha = \beta + 1$ alors $x_\alpha = f(E \setminus A_\beta)$ et $A_\alpha = A_\beta \cup \{x_\alpha\}$
$\star$ si α est un ordinal limite alors $x_\alpha = f(E \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)$ et $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \cup \{x_\alpha\}$

A chaque étape de la construction, on établit un plongement de l'ordinal correspondant au rang de l'étape en question dans E, ce plongement étant donné par la suite (x_α). Ainsi on est sur qu'à un moment donné, les A_α construits vont recouvrir E ce qui achèvera la preuve car autrement on aurait **un plongement de Ord dans E c'est-à-dire un plongement d'une classe propre dans un ensemble**, ce qui est impossible.$\square$

$\diamond$ $(Zermelo) \rightarrow (AC)$
Ce sens est beaucoup plus facile à démontrer; en effet, on va opérer de la même façon que dans $\mathbb{N}$ lorsqu'on voulait trouver une fonction de choix de $\mathbb{N}$. Soit E un ensemble non vide; on pose dessus un bon ordre, noté $\leq$. Soit maintenant une partie X de E non vide, alors X possède un **unique** plus petit élément. On associe donc, par une fonction que l'on notera f, cet élément à X. On vérifie sans difficulté que f est une fonction de choix sur E $(f(X) = min(X))$.$\square$

On voit que l'induction transfinie à été nécessaire pour prouver le premier sens de la preuve. De plus, on utilise pour conclure ce sens un argument classique qui est qu'on ne peut pas plonger les ordinaux en entier dans un ensemble.

1.4 Zorn vs Zermelo + Induction transfinie

Afin d'expliciter ce qui a été annoncé au début du chapitre précédent, on va prouver un théorème classique, qui s'énonce usuellement avec Zorn, avec l'aide de Zermelo + Induction transfinie.

Théorème 2 *(Théorème de Krull). Soit A un anneau unitaire; tout idéal de A est contenu dans un idéal maximal.*

Démonstration:
◇ **Preuve classique (avec Zorn).**
On considère un idéal $\mathcal{I}$ de A et l'ensemble E des idéaux de A contenant $\mathcal{I}$ et différents de A; E est non vide et comme la réunion d'une chaîne d'idéaux ne contenant pas 1 est un idéal ne contenant pas 1, E est un ensemble inductif pour l'inclusion. Ainsi E possède un plus grand élément, $\mathcal{M}$. on vérifie facilement que $\mathcal{M}$ est un idéal maximal.
Cette preuve bien que très condensée, n'est pas très intuitive: il faut poser le bon ensemble et la bonne relation d'ordre; dans ce cas simple, on peut encore arriver à faire cela mais ce n'est pas toujours le cas.
Voyons donc la démonstration avec Zermelo.
◇ **Preuve constructive (avec Zermelo + Induction transfinie).**
L'idée de la preuve est de partir de $\mathcal{I}$ et de rajouter des éléments à $\mathcal{I}$ jusqu'à saturation, c'est-à-dire jusqu'à obtenir un idéal maximal. Grâce à Zermelo, on pose sur A un bon ordre que l'on notera $\preceq$ (on peut donc indexer tous les éléments de A par un ordinal). On va construire une suite $(\mathcal{I}_\alpha)$ dans l'ensemble des idéaux de A, différents de A. On utilisera par la suite le lemme suivant.

Définition 3 . *Soit $\mathcal{I}$ un idéal dans un anneau A; on pose $Z(\mathcal{I}) = \{x \notin \mathcal{I} \ ; \ (\mathcal{I}, x) \neq A\}$ ($(\mathcal{I}, x)$ représente l'idéal engendré par $\mathcal{I}$ et x).*

Lemme 4 . *Dans un anneau, un idéal $\mathcal{I}$ est maximal si et seulement si $Z(\mathcal{I}) = \emptyset$.*

Revenons au théorème de Krull; on pose tout d'abord $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$ et on considère l'ensemble $Z(\mathcal{I}_0)$. Soit $\mathcal{I}_0$ est maximal (donc $Z(\mathcal{I}_0)$ est vide) et on pose $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0$, soit $\mathcal{I}_0$ n'est pas maximal. Dans ce cas comme $Z(\mathcal{I}_0)$ est non vide, on peut considérer son plus petit élément pour le bon ordre de A. On note ainsi $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{I}_0, min(Z(\mathcal{I}_0)))$. On peut ainsi lancer une construction par récurrence *classique* en posant $\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n$ si $Z(\mathcal{I}_n) = \emptyset$ et $\mathcal{I}_{n+1} = (\mathcal{I}_n, min(Z(\mathcal{I}_n)))$ sinon. On obtient donc une suite sur $\mathbb{N}$; posons maintenant $\mathcal{I}_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{I}_n$. Comme tous les $\mathcal{I}_n$ sont distincts de A, par construction, aucun ne contient 1; de ce fait, $\mathcal{I}_\omega$ ne contient pas 1 et est donc différent de A (on remarquera que l'hypothèse "A est unitaire" est utilisée à ce niveau de la démonstration et on fera le lien avec la démonstration utilisant Zorn).
On va ainsi lancer une construction transfinie. Soit α un ordinal; on suppose construite la suite $(\mathcal{I}_\beta)$ pour $\beta < \alpha$. On a donc:

1) si α est un ordinal successeur ($\alpha = \gamma + 1$), alors
⋆ si $\mathcal{I}_\gamma$ est un idéal maximal, on pose $\mathcal{I}_\alpha = \mathcal{I}_\gamma$

$\star$ sinon on pose $\mathcal{I}_\alpha = (\mathcal{I}_\gamma, min(Z(\mathcal{I}_\gamma)))$

2) si α est un ordinal limite, on pose $\mathcal{I}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{I}_\beta$

La suite $(\mathcal{I}_\alpha)$ est strictement croissante jusqu'à ce que, éventuellement, elle stagne. De plus, par construction, comme A est unitaire, les $\mathcal{I}_\alpha$ sont toujours différents de A. Supposons que cette suite ne stagne jamais; on aurait alors **un plongement des ordinaux dans l'ensemble des idéaux de** A. Ceci étant impossible, la suite $(\mathcal{I}_\alpha)$ se stabilise à un certain rang, η. Par construction, $\mathcal{I}_\eta$ est un idéal maximal, contenant $\mathcal{I}$.$\square$

Bien que la seconde partie de la démonstration soit plus longue, elle reste plus constructive; ainsi on est souvent amené à bâtir une preuve avec Zermelo+Induction *au brouillon* pour la présenter avec Zorn.

1.5 Applications de l'axiome du choix et de l'induction transfinie

L'axiome du choix possède un certain nombre d'applications plus ou moins bien connues. Nous en exposerons ici certaines ainsi que des utilisations de l'induction transfinie.

1.6 Application aux mathématiques en général

Proposition 5 . *Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$; $\mathcal{A}$ est stable par union quelconque si et seulement si $\mathcal{A}$ est stable par union finie et par union de chaînes croissantes.*

Démonstration: soit X un élément de $\mathcal{A}$ (que l'on suppose non vide); on pose l'ensemble $\Gamma(X) = \{B \in \mathcal{A} \ ; \ X \subset B\}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par union de chaînes croissantes, $\Gamma(X)$ est inductif pour l'inclusion. Grâce à Zorn, $\Gamma(X)$ possède donc un élément maximal pour l'inclusion. Soient à présent 2 éléments de $\mathcal{A}$, X et Y, un élément maximal de $\Gamma(X)$, U et un élément maximal de $\Gamma(Y)$, V; comme $\mathcal{A}$ est stable par union finie, $U \cup V = W$ appartient à $\mathcal{A}$. Or par maximalité de U et V, $W = U$ et $W = V$. Ainsi U contient tous les éléments de $\mathcal{A}$ et comme il appartient à $\mathcal{A}$, $U = \bigcup_{X\in\mathcal{A}} X$.$\square$

1.6.1 Application à la topologie

Un domaine des mathématiques qui utilise le plus l'axiome du choix est la topologie; on a déjà vu que l'Axiome du Choix Dénombrable était central dans les espaces métriques. Cependant lorsqu'on s'intéresse à des espaces topologiques plus généraux, on est obligé de considérer des versions plus fortes que l'Axiome du Choix Dénombrable. Les applications de l'Axiome du Choix les plus courantes sont le théorème de Hahn-Banach et le paradoxe de Tarski-Banach (c.f [J], [HR], [AF1] et [AF2]) sur la décomposition des boules.

Proposition 6 . *Un espace topologique est compact si et seulement si il possède la propriété des fermés emboîtés, c'est-à-dire que l'intersection d'une chaîne décroissante de fermés non vides est non vide.*

Démonstration: seul le sens (Propriété des fermés emboîtés) $\rightarrow$ (Compact) est intéressant.

Considérons une famille $\mathcal{F}$ de fermés telle que l'intersection d'un nombre fini de ses éléments est non vide. Grâce à Zermelo, on peut poser un bon ordre sur $\mathcal{F}$ ce qui revient à indexer ses éléments par des ordinaux; on aura donc $\mathcal{F} = \{F_\alpha \ ; \ \alpha \in \gamma\}$ avec α et γ des ordinaux. Pour chaque $\alpha \in \gamma$, on pose $H_\alpha = \bigcap_{\beta \leq \alpha} F_\beta$. Ainsi tous les H_α sont fermés; de plus par définition le suite (H_α) est décroissante. On montre aussi que pour tout ordinal α, $\bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$. Montrons que H_α n'est jamais vide. Soit $P(\alpha)$ la propriété pour $\alpha < \gamma$: pour tous $G_1, ..., G_n$, n éléments de $\mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ $H_\alpha \cap G_1 \cap ... \cap G_n$ est non vide. Par définition de la suite (H_α) et par propriétés de $\mathcal{F}$, pour tout $m \in \omega$, $P(m)$ est vraie. Soit α un ordinal; on suppose que la propriété P est vraie pour tout ordinal $\beta < \alpha$. On a $H_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta \cap F_\alpha$; soient $G_1, ..., G_n$ n éléments de $\mathcal{F}$ alors
$H_\alpha \cap G_1 \cap ... \cap G_n = \bigcap_{\beta<\alpha}(H_\beta \cap F_\alpha \cap G_1 \cap ... \cap G_n)$.
Par hypothèse de récurrence, pour tout $\beta < \alpha$, $H_\beta \cap F_\alpha \cap G_1 \cap ... \cap G_n$ est non vide. $H_\alpha \cap G_1 \cap ... \cap G_n$ apparaît donc comme l'intersection d'une famille décroissante de fermés non vide. Ainsi $H_\alpha \cap G_1 \cap ... \cap G_n$ est non vide. On en déduit que l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{F}$ est non vide.□

1.6.2 Application à la théorie de la mesure

Dans ce chapitre, on n'utilisera que l'induction transfinie (et l'Axiome du Choix Dénombrable). Cependant, l'Axiome du Choix a aussi un rôle prépondérant dans la théorie de la mesure ne serait ce que pour construire un ensemble de $\mathbb{R}$ non Lebesgue mesurable (c.f [A]). Les boréliens sont des ensembles très particuliers et qui en apparence ne sont pas simples. Or, grâce aux constructions transfinies, on peut donner une "hiérarchie" aux boréliens.
Dans la suite, $\mathcal{A}$ désignera l'ensemble des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.

Définition 7 . *Soit un ensemble E de parties de $\mathbb{R}$, on note $f(E)$ l'ensemble des unions croissantes et décroissantes dénombrables d'éléments de E.*

Remarque. E est inclus dans $f(E)$

Hiérarchie des boréliens
On note ω_1 le plus petit ordinal non dénombrable. On définit par induction transfinie une suite (X_α) à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ telle que:
$\diamond$ $X_0 = \mathcal{A}$
$\diamond$ soit α un ordinal; on suppose que tous les X_β pour $\beta < \alpha$ on été construits alors
$\star$ si α est limite, $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$
$\star$ si α est successeur $(\alpha = \gamma + 1)$, $X_\alpha = f(X_\gamma)$

Théorème 8 . $\mathcal{B} = X_{\omega_1}$

Démonstration:
$\diamond$ $X_{\omega_1} \subset \mathcal{B}$
Soit la propriété $P(\alpha)$: $X_\alpha \subset \mathcal{B}$. Par définition, $P(0)$ est vraie. Soit α un ordinal; supposons $P(\beta)$ vraie pour tout $\beta < \alpha$. Si α est limite alors immédiatement $X_\alpha \subset \mathcal{B}$. Si $\alpha = \beta + 1$, d'après la définition de f, $X_\alpha \subset \mathcal{B}$. Ainsi P est vraie pour ω_1.

$\diamond$ $\mathcal{B} \subset X_{\omega_1}$
Pour montrer cela, il suffit de prouver que X_{ω_1} est stable par union, par complémentaire et par

unions dénombrables croissantes.
$\star$ Stabilité par union et complémentaire:
soit la propriété $P(\alpha)$: $(\exists n \in \omega \ \ \forall (A, B) \in X_\alpha^2 \ \ A \cup B \in X_{\alpha+n})$ et $(\forall A \in X_\alpha \ \ \mathbb{R} \setminus A \in X_\alpha)$.
Début de la preuve: comme $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, $P(0)$ est vraie $(n = 0)$. Soit α un ordinal; supposons $P(\beta)$ vraie pour tout $\beta < \alpha$. Si α est limite alors considérons A et B deux éléments de X_α. D'après la définition de X_α, il existe β_0 et β_1 strictement inférieurs à α tels que $A \in X_{\beta_0}$ et $B \in X_{\beta_1}$. On note γ le plus grand entre β_0 et β_1. Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \cup B \in X_{\gamma+n}$; or $\gamma + n < \alpha$ donc $A \cup B \in X_\alpha$. La seconde partie de la propriété est vraie par définition de X_α...
$\star$ Stabilité par union croissante dénombrable:
il s'agit de la partie intéressante de la preuve; en effet, jusque là, on ne s'est pas servi de ω_1. Ici, on donne une preuve directe sans récurrence transfinie. Soit une famille $\mathcal{F} = \{A_{n \in \mathbb{N}}\}$ croissante dénombrable d'ensembles de X_{ω_1}; montrons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in X_{\omega_1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ordinal $\alpha_n < \omega_1$ tel que $A_n \in X_{\alpha_n}$; on note α la borne supérieure des α_n. Comme tous les α_n sont strictement inférieurs à ω_1, ils sont tous dénombrables. De plus, on a que $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$. De ce fait, grâce à l'Axiome du Choix Dénombrable, α est dénombrable et ainsi $\alpha < \omega_1$. Dès lors, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in X_{\alpha+1}$ avec $\alpha + 1 < \omega_1$.□

On vient donc de donner une structure aux boréliens. On peut définir leur rang.

Définition 9 *(rang d'un borélien). Soit B un borélien; on appelle rang de B le plus petit ordinal α tel que $B \in X_\alpha$.*

Proposition 10 . *Le rang d'un borélien est un ordinal successeur.*

Remarque. Toute cette construction peut être généralisée sans difficulté à toute algèbre de Boole autre que $\mathcal{A}$.

Pour terminer, on peut démontrer que pour les boréliens réels $X_\alpha \subsetneq X_\beta$ pour $\alpha < \beta$. Ce qui permet d'affirmer qu'on ne peut pas obtenir le borélien le plus général grâce un algorithme fini utilisant à chaque étape des unions et intersections dénombrables et passage au complémentaire en partant des intervalles.

1.6.3 Conclusion

En conclusion, on va répondre à la question posée au début: est-ce qu'une partie d'un espace topologique séparé est fermée si et seulement si elle contient la limite de ses suites convergentes? La réponse est négative. Pour cela considérons l'ensemble $\omega_1 + 1$. On pose sur $\omega_1 + 1$ la topologie de l'ordre, celle engendrée par les intervalles ouverts bornés. Pour cette topologie, $\omega_1 + 1$ est séparé.

Proposition 11 . *ω_1 n'est pas fermé mais contient la limite de toutes ses suites convergentes.*

Démonstration: montrons tout d'abord que le complémentaire de ω_1 n'est pas ouvert. En effet, cet ensemble a comme unique élément ω_1; or par définition, la borne inférieure de tout intervalle ouvert contenant ω_1 se trouve dans ω_1, ce qui assure que $\omega_1 + 1 \setminus \omega_1$ n'est pas ouvert.
Montrons maintenant que ω_1 contient la limite de toutes ses suites convergentes. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans ω_1 qui converge. Comme on l'a vu, la borne supérieure des α_n, notée α, est inférieure strictement à ω_1; or la limite de cette suite ne peut être plus grande que α. Ainsi (α_n) converge dans ω_1.

1.7 Bibliographie

• axiome du choix

[J] T. JECH, *The axiom of choice*, North Holland, 1973

[HR] P. HOWARD & J.E. RUBIN, *Consequences of the axiom of choice*, American Mathematical Society, 1998

• Paradoxe de Tarski-Banach

[AF1] J-M. ARNAUDIES & H. FRAYSSE, *Cours de mathématiques 4 - Algèbre bilinéaire et géométrie*, Bordas, Paris 1990

• Théorème de Hahn-Banach

[AF2] J-M. ARNAUDIES & H. FRAYSSE, *Cours de mathématiques 2 - Analyse*, Bordas, Paris 1990

• Mesure sur $\mathbb{R}$

[A] J-M. ARNAUDIES, *L'intégrale de Lebesgue sur la droite réelle*, Librairie Vuibert, Paris 1997