Partiel de *logique et complexité*
cours Bruno Poizat / TD Natacha Portier
vendredi 28 mars 2003

Notes de cours et de TD autorisées
Rédaction soignée indispensable !

Exercice 1

Éliminez les quanteurs dans la formule suivante, pour le corps des nombres complexes dans le langage des corps, puis pour le corps des nombres réels dans le langage des corps ordonnés :

$$\exists y \forall z \quad z^2 - 2xz - y + 1 \neq 0 \vee xz = y$$

Exercice 2

Un graphe G est ici une relation binaire irréflexive et symétrique. On dit que a et b sont liés dans le graphe G pour dire que $G(a, b)$ est satisfaite. On appelle clique de G un ensemble de points tous deux à deux liés et anticlique de G un ensemble de points deux à deux non liés.

Question 2,1

Ecrire des axiomes du premier ordre exprimant que G est un graphe.

Question 2,2

Écrire un énoncé C_n exprimant que G a au moins une clique à n éléments et un énoncé A_n exprimant qu'il a au moins une anticlique à n éléments.

Question 2,3

Montrer que si G satisfait tous les C_n alors il a une extension élémentaire qui a une clique infinie.

Question 2,4

Donner un exemple de graphe G qui satisfasse tous les C_n mais qui n'ait pas de clique infinie. Ce graphe est-il ω-saturé ?

Question 2,5

Soit G un graphe de base infinie. Montrer qu'il existe une suite infinie a_0, a_1, ..., a_n, ... d'éléments distincts de sa base possédant la propriété suivante : pour chaque n soit tous les a_m pour $m > n$ sont liés à a_n soit aucun a_m pour $m > n$ n'est lié à a_n. En déduire que G a une clique infinie ou une anticlique infinie.

Question 2,6

Montrer qu'à tout entier n est associé un entier $\gamma(n)$ tel que tout graphe satisfaisant $\neg C_n \wedge \neg A_n$ a au plus $\gamma(n)$ éléments.

Question 3

Soient $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$ des $\mathcal{L}$-structures. Trouver un exemple avec $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, mais $\mathfrak{N} \not\prec \mathfrak{N}'$.