**Master de Mathématiques / Master d'Informatique**
**Logique et Complexité**
**Partiel du 6 avril 2006, 13h30 – 16h30**
**Les notes du cours sont autorisés**

**Problème 1.**

1. Soit $T$ la $\mathcal{L}_{gp}$-théorie de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$. Montrer par une inclusion non-élémentaire de modèles que $T$ n'est pas modèle-complète.

2. Pour $n \geq 2$ soit $D_n(x)$ un prédicat unaire interpreté comme divisibilité par $n$. Donc $D_n(x) \Leftrightarrow \exists y\, y + \cdots + y = x$ (somme de $n$ termes). Soit $T'$ la théorie de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ dans le langage enrichi par tous les $D_n$.

   (a) Montrer que dans deux modèles $\omega$-saturés $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $T'$, si $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$ sont deux uples qui satisfont les mêmes formules atomiques, alors pour tout $m' \in M$ il y a $n' \in N$ tel que $\bar{m}m'$ et $\bar{n}n'$ satisfont les mêmes formules atomiques.

   (b) En deduire que $T'$ élimine les quanteurs, et est modèle-complète.

**Problème 2.** Soitent $T$ et $T'$ deux théories dans un même langage.

1. Montrer que si $T$ et $T'$ ont les mêmes conséquences universelles, alors tout modèle de $T$ se plonge dans un modèle de $T'$, et réciproquement.

2. Montrer que si $T$ consiste d'axiomes de la forme $\forall\exists$, alors toute réunion d'une chaîne (non nécessairement élémentaire) de modèles de $T$ est encore un modèle de $T$.

3. Supposons que $T$ soit formée d'énoncés $\forall\exists$ ou $\exists\forall$, et que $T'$ soit l'ensemble des énoncés $\forall\exists$ impliqués par $T$. Montrer que si toute réunion d'une chaîne (non nécessairement élémentaire) de modèles de $T$ est encore un modèle de $T$, alors $T$ et $T$ sont équivalents.
   (Indication: Prendre un axiome $\varphi$ de $T$ qui n'est pas conséquence de $T'$ et poser $T'' := T' \cup \{\neg\varphi\}$. Montrer que 1. est appliquable a $T, T''$, et 2. est appliquable à $T''$. Conclure avec un argument de chaîne.)

**Problème 3.** Eliminer les quanteurs dans les formules suivantes

$$(a) \quad \forall v \exists x\, vx^2 + yx + z = 0 \qquad (b) \quad \exists v \forall x\, vx^2 + yx + z = 0$$

dans les corps algébriquement clos, et dans les corps réel clos.