Examen de *Logique*
Natacha Portier, le 26 mai 2014

Notes de cours et de TD interdites

Rédaction soignée indispensable ! Les résultats du cours peuvent être utilisés à condition de les énoncer soigneusement. Les résultats de TD doivent être redémontrés.

Quand une question est posée, il ne suffit pas de répondre oui ou non, il faut justifier la réponse et faire une preuve.

Exercice 1 :
Question 1,1
Énoncer le théorème de compacité du calcul propositionnel.
Question 1,2
Énoncer le théorème de complétude du calcul propositionnel.
Question 1,3
Admettre le théorème de complétude du calcul propositionnel et montrer le théorème de compacité du calcul propositionnel.

Exercice 2 : équivalence
On fixe le langage égalitaire $\mathcal{L} = (R; =)$ où R est un prédicat binaire. On rapelle qu'une théorie est un ensemble de formules closes du premier ordre sur $\mathcal{L}$.
Question 2,1
Existe t-il une théorie des relations d'équivalence n'ayant que des classes finies, i.e. une théorie dont l'ensemble des modèles soit exactement l'ensemble des ensembles munis d'une relation d'équivalence n'ayant que des classes finies ?
Question 2,2
Existe t-il une théorie des relations d'équivalence n'ayant qu'un nombre fini de classes ?
Question 2,3
Donner une axiomatisation de la théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes infinies.
Question 2,4
Une théorie T est finiment axiomatisable s'il existe une théorie finie T_1 telle que $T \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$. Montrer que dans ce cas, il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que $T' \vdash T$.
Question 2,5
La théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes infinies est-elle finiment axiomatisable ?

Exercice 3
On note $\mathcal{L}_{co}$ le langage $(0; 1; +; \times; \leq)$ où 0 et 1 sont des constantes, $+$ et $\times$ des fonctions binaires et $\leq$ un prédicat binaire.
Soit T la théorie de $\mathbb{N}$ dans le langage $\mathcal{L}_{co}$, c'est à dire l'ensemble des formules closes de $\mathcal{L}_{co}$ qui sont vraies dans le modèle des entiers naturels avec les opérations usuelles.

Question 3,1
Montrer qu'il existe un modèle de T dans lequel on peut trouver un élément non nul divisible par tous les entiers naturels non nuls.

Question 3,2
Montrer que la formule suivante appartient à T :

$$\forall x \exists y[\neg y = 0 \wedge \forall z(0 < z \leq x \rightarrow \exists t\ y = z \times t)]$$

Question 3,3
En utilisant la question précédente, montrer que tout modèle de T qui n'est pas $\mathbb{N}$ contient au moins un élément non nul divisible par tous les entiers naturels non nuls.

Exercice 4
On utilisera les **règles de déduction naturelle** suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\text{ax } (A \in \Gamma) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\text{true} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\bot_c$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\wedge_e^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\vee_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\forall_i\ (x \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}}\forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x A}\exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\exists_e\ (x \notin FV(\Gamma, C))$$

Les deux règles suivantes (introduction et élimination de la négation) sont dérivables en utilisant les règles ci-dessus ; on pourra s'en servir librement sans en donner de dérivation :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

Toute autre règle de dérivation utilisée devra être redérivée explicitement sur la copie.

La notation $A \leftrightarrow B$ est un raccourci pour $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. La notation $\neg A$ est un raccourci pour $A \rightarrow \bot$.

Écrire les arbres de preuve pour les 2 propriétés suivantes :
$(\neg \forall x, A) \leftrightarrow (\exists x, \neg A)$
$A \vee \neg A$

Exercice 5

Dans cet exercice, la relation $\in$ est interprétée comme la relation d'appartenance usuelle.

Question 5,1

Démontrer que l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\varnothing)$ ($\mathcal{P}^n$ désignant n itérations de l'opérateur "ensemble des parties") satisfait aux axiomes de ZF sauf l'axiome de l'infini.

Question 5,2

On note $\mathbf{0} = \varnothing$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\boldsymbol{n+1} = \{\boldsymbol{n}\}$ et $2\boldsymbol{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \ldots\}$ et $2\boldsymbol{N} + 1 = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \ldots\}$. Démontrer que l'ensemble

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\varnothing) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{P}^n(2\boldsymbol{N}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{P}^n(2\boldsymbol{N}+1)$$

satisfait aux axiomes d'extensionnalité, de réunion, de l'ensemble des parties, et de compréhension, mais pas au schéma d'axiomes de substitution.

Question 5,3

En déduire que l'axiome de la paire n'est pas conséquence des axiomes de ZF (moins l'axiome de l'infini) où l'on a remplacé le schéma de substitution par le schéma de compréhension.

Exercice 6 : élimination des quantificateurs dans les ordres denses sans extrémités

Par définition, un ensemble E muni d'une relation binaire $<$ est un ordre dense sans extrémité si $<$ est une relation d'ordre strict totale (totale, transitive et irréflexive), s'il n'y a ni plus petit ni plus grand élément et si entre deux éléments distincts, il en existe toujours un troisième.

Dans la suite de l'exercice, on fixe le langage égalitaire $\mathcal{L} = \{<, =\}$.

Question 6,1

Donner une axiomatisation du premier ordre de la théorie T des ordres denses sans extrémités. Donner un modèle de cette théorie.

Question 6,2

Montrer que pour toute formule sans quantificateurs $\varphi(x, y_1, ..., y_n)$ il existe une formule sans quantificateurs $\psi(y_1, ..., y_n)$ telle que

$$T \vdash \forall y_1 ... \forall y_n (\exists x \ \varphi(x, y_1, ..., y_n) \leftrightarrow \psi(y_1, ..., y_n))$$

Question 6,3

Montrer que T admet l'élimination des quantificateurs.

Question 6,4

Est-ce que T est décidable ?

Question 6,5

Est-ce que T est complète ?