Partiel du 03/04/2014 (durée : 2h)

Les documents ne sont pas autorisés. Tout résultat vu en cours peut être utilisé librement sans démonstration, mais les résultats vus en TD ***doivent*** *être redémontrés avant d'être utilisés.*

Le sujet est assez long, inutile de paniquer si vous ne parvenez pas à tout terminer. Le barême est précisé pour chaque exercice : les exercices 1 et 2 ne valent que 6 points, ne passez pas trop de temps dessus ! Les exercices sont indépendants, et peuvent être faits dans n'importe quel ordre.

On utilisera les **règles de déduction naturelle** suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\text{ ax } (A \in \Gamma) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\text{ true} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\bot_c$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\wedge_e^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\vee_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\forall_i\ (x \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}}\forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x A}\exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\exists_e\ (x \notin FV(\Gamma, C))$$

Les deux règles suivantes (introduction et élimination de la négation) sont dérivables en utilisant les règles ci-dessus ; on pourra s'en servir librement sans en donner de dérivation :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

Toute autre règle de dérivation utilisée devra être redérivée explicitement sur la copie.
La notation $A \leftrightarrow B$ est un raccourci pour $(A \to B) \wedge (B \to A)$. La notation $\neg A$ est un raccourci pour $A \to \bot$.

Exercice 1. *Déduction naturelle, 4 points*

Écrire les arbres de preuve pour les propriétés suivantes :

1. $(\neg \forall x, A) \leftrightarrow (\exists x, \neg A)$

2. $A \vee \neg A$

Exercice 2. *Théorie des modèles, 2 points*

On note $\mathcal{L} = \{r\}$ le langage constitué d'un unique symbole de relation r d'arité 2. Soit T la théorie contenant les formules closes suivantes :

$\forall x, r(x, x)$
$\forall x, \forall y, (r(x, y) \wedge r(y, x)) \to (x = y)$
$\forall x, \forall y, \forall z, (r(x, y) \wedge r(y, z)) \to r(x, z)$
$\exists x, \forall y, r(x, y)$

Donner deux modèles de T et une formule F qui distingue ces deux modèles.

Exercice 3. *Coloriage par arêtes, 8 points*

Dans cet exercice, le mot *graphe* désigne un graphe non-orienté et *simple* : il n'y a au plus qu'une seule arête entre deux sommets, et aucune arête ne relie un sommet à lui-même.

Soit k un entier. On dit qu'un graphe est *k-coloriable par arêtes* si il est possible de colorier ses arêtes en utilisant au plus k couleurs de manière à ce que deux arêtes ayant une extrémité en commun soient de couleurs différentes.

Démontrer que tout graphe G est k-coloriable par arêtes si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est k-coloriable par arêtes.

Exercice 4. *Fonction de Skolem, 6 points*

Soient $\mathcal{L}$ un langage et $A(x, y)$ une formule du premier ordre dans ce langage ayant pour seules variables libres x et y. Soit f un symbole de fonction d'arité 1 tel que $f \notin \mathcal{L}$. On ajoute à la déduction naturelle la règle suivante :

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\forall x, \exists y, A(x,y)) \to (\forall x, A(x, f(x)))}\ Sk_A$$

Démontrer que pour toute formule du premier ordre B et tout contexte Γ qui ne contiennent pas le symbole f, si on peut dériver $\Gamma \vdash B$ en utilisant la déduction naturelle et la règle Sk_A, alors on peut dériver $\Gamma \vdash B$ en n'utilisant que la déduction naturelle. (*Indication :* Utiliser la complétude.)