Modèles de calcul, TD numéro 10
Natacha Portier
lundi 22 avril 2002

Une fonction f est constructible en espace s'il existe une machine de Turing avec un ruban d'entrée et un ruban de travail tel que sur l'entrée 1^n la machine s'arrête avec sur son ruban de travail $1^{f(n)}$ et les autres cases n'ont pas été utilisées (les blancs lus à la fin et au début du ruban ne sont pas considérés comme utilisés.

Question 1

Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en espace :
(a) si p est un entier, la fonction constante égale à p
(b) $f : n \mapsto n$
(c) $f : n \mapsto \lceil n/2 \rceil$
(d) $f : n \mapsto n^2$
(e) $f : n \mapsto 2^n$
(f) $f : n \mapsto \lceil \sqrt{n} \rceil$
(g) $f : n \mapsto \lceil \log_2(n) \rceil$
si f et g sont constructibles en espace :
(h) $f - 1$
(i) $f + g$
(j) fg
(k) 2^f

Les machines de Turing considérées ont un ruban d'entrée en lecture seule et des rubans de travail. Par convention une machine de Turing qui travaille en espace $S(n)$ est une machine de Turing qui utilise au plus $\max(1, \lceil S(n) \rceil)$ de chacun de ses rubans de travail. De même une machine de Turing qui travaille en temps $T(n)$ est une machine qui effectue au plus $\max(n+1, \lceil T(n) \rceil)$ pas de calcul. L'alphabet utilisé est fini mais quelconque.

Question 2,1 : compression d'espace

Soit L un langage accepté par une machine de Turing avec k rubans de travail en espace $S(n)$. Soit $c > 0$. Montrer que L est accepté par une machine de Turing en espace $cS(n)$.

Question 2,2

Montrer que si L est dans $NESPACE(S(n))$ alors pour toute constante c strictement positive L est dans $NESPACE(cS(n))$.

Par convention une machine de Turing qui travaille en espace $S(n)$ est une machine de Turing qui utilise au plus $\max(1, \lceil S(n) \rceil)$ de chacun de ses rubans de travail. De même une machine de Turing qui travaille en temps $T(n)$ est une machine qui effectue au plus $\max(n+1, \lceil T(n) \rceil)$ pas de calcul. L'alphabet utilisé est fini mais quelconque.

Question 3,1 : réduction du nombre de rubans pour la complexité en temps : 1 ruban

Montrer que si L est dans $DTIME(T(n))$ alors L est accepté par une machine de Turing à un ruban en temps $T^2(n)$.

Question 3,2

Montrer que si L est dans $NTIME(T(n))$ alors L est accepté par une machine de Turing non déterministe à un ruban en temps non déterministe $T^2(n)$.

Question 4: réduction du nombre de rubans pour la complexité en temps : 2 rubans

Nous allons montrer que si L est accepté par une machine de Turing M_1 à k rubans alors L est accepté par une machine de Turing M_2 à 2 rubans de travail en temps $T(n) \log T(n)$.

Question 4,1

Le premier ruban de M_2 est constitué de $2k$ pistes. Nous allons voir comment simuler les calculs du premier ruban de M_1 à l'aide des 2 premières pistes et du deuxième ruban. L'idée est qu'au lieu de déplacer la tête de lecture c'est le ruban qui se déplace.

Le premier ruban de M_2 est découpé en blocs B_i avec i entier relatif. Le bloc B_0 est constitué d'une case, le bloc $B_i (i > 0)$ de 2^{i-1} cases ainsi que le bloc $B_{-i} (i > 0)$.

Montrer, sur un exemple puis en donnant l'algorithme, comment simuler le dé/-pla/-ce/-ment de la tête de lecture de M_1 en respectant les conditions suivantes :

1. B_0 a toujours une lettre sur sa piste basse et sa piste haute contient un élément spécial qui permet de le repérer.
2. Pour $i < j$, B_i représente des cases à gauche de celles de B_j.
3. Le contenu de B_i représente des cases consécutives du ruban de M_1. Pour $i > 0$, la piste du haut représente les cases qui sont à la gauche de celles de la piste du bas. Pour $i < 0$ c'est l'inverse.
4. Pour tout $i > 0$
   - soit les deux pistes de B_i sont pleines et B_{-i} est vide,
   - soit l'inverse,

- soit les pistes basses de B_i et B_{-i} sont pleines et les hautes sont vides.

Question 4,2

Estimer le temps nécessaire si on doit aller jusqu'au bloc B_i. Combien doit-on faire de pas de calcul pour en arriver là ? En déduire le temps de calcul de M_2 en fonction de celui de M_1. Considérer le cas des k rubans et conclure.

Question 4,3

Montrer que si L est accepté par une machine de Turing non déterministe à k rubans alors L est accepté par une machine de Turing non déterministe à 2 ruban en temps $T(n) \log T(n)$.

Question 5

Une fonction f est constructible en temps s'il existe une machine de Turing telle que sur l'entrée 1^n la machine s'arrête après $f(n)$ pas de calcul.

Question 5,1

Est-ce que toute fonction calculable en temps est calculable en espace ? Est-ce que la réciproque est vraie ?

Question 5,2

Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en temps :
(a) si p est un entier, la fonction constante égale à p
(b) $f : n \mapsto n$
(c) si p est un entier, $f : n \mapsto n^p$
(d) $f : n \mapsto 2^n$
si f et g sont constructibles en temps :
(e) $f + g$
(f) fg

Question 5

Montrer que $DTIME(2^n) \subsetneq DTIME(n2^n)$.