Modèles de calcul, TD numéro 3
Natacha Portier
lundi 25 février 2002

Rappel : Un système de programmation est une liste $\Phi_0, \Phi_1, ...$ qui inclut toutes les fonctions partiellement récursives d'une variable de N. Un système de programmation est universel s'il existe une fonction partielle récursive $\Phi_{univ}$ telle que $\Phi_{univ}(< i, x >) = \Phi_i(x)$ pour tout $i$ et tout $x$. Cette fonction est appelée fonction universelle partielle récursive. Un système de programmation universel est acceptable s'il vérifie le théorème $s - m - n$.

**Théorème** $s - m - n$ : Il existe une fonction totale récursive $s$ telle que pour tout $i$, pour tout $m$ plus grand que 1 et $n$ plus grand que 1, et pour tous $x_1, ..., x_m$ et $y_1, ..., y_n$,

$$\Phi_{s(i,m,x_1,...,x_m)}(y_1, ..., y_n) = \Phi_i(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$$

### Question 1

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable. Montrer qu'il existe une fonction récursive $pl(i, j)$ telle que pout tous $i$ et $j$ l'entier $pl(i, j)$ soit un indice pour la fonction $\Phi_i + \Phi_j$.

### Question 2

**Théorème 1** : Un système de programmation universel est acceptable si et seulement s'il existe une fonction totale récursive $c$ telle que $\Phi_{c(i,j)} = \Phi_i \circ \Phi_j$ pour tous $i$ et $j$.

### Question 2.1

Montrer le sens direct.

### Question 2.2

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation universel tel qu'il existe une fonction totale récursive $c$ telle que $\Phi_{c(i,j)} = \Phi_i \circ \Phi_j$ pour tous $i$ et $j$.

On définit les fonctions récursives $P$, $Q$ et $R$ par : $P(y) = (0, y)$, $Q(x, y) = (x + 1, y)$ pour tout $x$ et $y$, $\Phi_p = P$, $\Phi_q = Q$, $R(0) = p$ et pour tout $x$, $R(x + 1) = c(q, R(x))$.

Montrer que pour tout $x$ et $y$ on a $\Phi_{R(x)}(y) = (x, y)$.

Conclure.

**Question 3**

**Théorème du point fixe** :
Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable. Soit $\alpha$ une fonction récursive primitive à une variable. Alors il existe un entier $i$ tel que $\Phi_i = \Phi_{\alpha(i)}$.

Montrer le théorème.

**Question 4**

Les fonctions booléennes peuvent s'exprimer en fonction de $ET$, $OU$ et $NON$.

**Question 4.1**

Montrer qu'on peut utiliser seulement $ET$ et $NON$.

**Question 4.2**

On définit les connecteurs $NOU$ et $NET$ par $NOU(x, y) = \neg(x \vee y)$ et $NET(x, y) = \neg(x \wedge y)$. Montrer que toute fonction booléenne peut s'exprimer avec $NOU$ seulement. Le montrer pour $NET$.

**Question 4.3**

Montrer qu'il n'y a pas de connecteur binaire à part ces deux qui permette de tout exprimer (sans utiliser les fonctions constantes VRAI ni FAUX).

**Question 5**

Une fonction booléenne croissante $F$ est une fonction qui a la propriété suivante : si on change une des valeurs de l'entrée de $VRAI$ à $FAUX$, la valeur de la fonction ne peut pas changer de $FAUX$ à $VRAI$. Montrer qu'une fonction est croissante si et seulement si elle peut s'exprimer par un circuit qui n'utilise que des portes $ET$ et $OU$, et les fonctions constantes VRAI et FAUX.