Modèles de calcul, TD numéro 4
Natacha Portier
lundi 3 mars 2002

Question 1

Nous allons montrer qu'il existe une fonction partiellement récursive qui ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 1,1 (méthode JM)

Soit $A = \{i \mid \phi_i(0) = 0\}$ et $B = \{i \mid \phi_i(0) = 1\}$. Montrer que ces ensembles sont récursivement inséparables.

Question 1,2

Soit ϕ la fonction définie sur $A \cup B$ qui vaut 0 sur A et 1 sur B. Montrer qu'elle est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 1,3 (méthode PK)

Soit ϕ la fonction définie sur l'ensemble des numéros de machine de Turing dont le calcul s'arrête sur l'entrée 0, et telle que telle que pour tout entier i la machine de Turing numéro i s'arrête sur l'entrée 0 après $\phi(i)$ pas de calcul.

Montrer que cette fonction est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 1,4 (méthode MD)

Soit $\varphi(i) = \phi_i(i) + 1$. Montrer que cette fonction est partiellement récursive et ne peut pas être prolongée en fonction récursive totale.

Question 2

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable.
Soit $A = \{j | \exists x \Phi_j(x) = j\}$.

Question 2,1

On dit qu'un ensemble d'entiers E préserve les fonctions si pour tout entier i et j, si i appartient à E et $\Phi_i = \Phi_j$ alors j appartient à E. Est-ce que A préserve les fonctions ?

Question 2,2

Est-ce que A est récursif ?

Question 2,3

Est-ce que A est récursivement énumérable ?

Question 3

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable.

Question 3,1

Montrer qu'il existe une solution à l'équation :

$$\forall x \Phi_j(x) = \begin{cases} 2\Phi_x(x) + 1 & \text{si } \; x > 3j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 3,2

Soit j la solution de l'équation et $A = \{x \mid \Phi_j(x) \text{ diverge}\}$. Est-ce que A est récursivement énumérable ?

Question 4

Soit $\Phi_0, \Phi_1, ...$ un système de programmation acceptable. Soit f une fonction de N dans N bijective et récursive totale.

Question 4,1

L'équation suivante a-t-elle une solution ?

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} \Phi_{f(x)}(j) & \text{si } \; f(j) > j \\ \Phi_x(f(j)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 4,2

Soit j une solution de l'équation précédente. Soit $A = \{x|\Phi_j(x) \text{ diverge}\}$. Est-ce que A est récursivement énumérable ?

Question 5,1

Donner un circuit booléen qui calcule la somme de deux entiers $y_n...y_1$ et $x_n...x_1$ écrits en base 2 de taille n et évaluer sa taille et sa profondeur.

Question 5,2

On améliore la profondeur du circuit précédent de la manière suivante. On suppose que n est une puissance de 2. On calcule en parallèle la somme de $y_{n/2}...y_1$ et $x_{n/2}...x_1$ ainsi que les sommes $y_n...y_{n/2+1}+x_n...x_{n/2}$ et $y_n...y_{n/2+1}+x_n...x_{n/2}+1$, puis on choisit le résultat en fonction de la retenue. Evaluer la taille et la profondeur du circuit.

Question 5,3

Généraliser la construction précédente.