Modèles de calcul, TD numéro 6
Natacha Portier
lundi 18 avril 2002

Question 1 : un problème P-complet

Considérons un ensemble fini X muni d'une relation ternaire $R \subseteq X \times X \times X$ et de deux sous-ensembles $X_s \subseteq X$ et $X_t \subseteq X$. On définit l'ensemble A comme l'ensemble des sommets accessibles à partir de la source. C'est le plus petit sous-ensemble de X contenant X_s et tel que si $(x, y, z) \in R$ et y et z sont dans A alors x appartient également à A. Le problème SPS (Solvable Path Systems) est l'ensemble des (X, R, X_s, X_t) tels que $A \cap X_t \neq \emptyset$.

Question 1,1

Montrer que ce problème est P.

Question 1,2

Une machine de Turing oscillante est une machine de Turing à une demi-bande pour laquelle quel que soit le calcul la tête de lecture explore les cases exactement dans l'ordre suivant :
0
1 0
1 2 1 0
1 2 3 2 1 0
1 2 3 4 3 2 1 0
...
Montrer que tout problème P est décidable en temps polynomial par une machine de Turing oscillante.

Question 1,3

Montrer que les fonctions suivantes sont calculables en espace logarithmique :

- $case(t)$ est le numéro de la case lue à l'instant t (avec $case(0) = 0$).
- $tprec(t)$ est le dernier moment avant t où la tête de lecture était sur la case $case(t)$. Si t est le premier pas de calcul où la case $case(t)$ est explorée alors par convention $tprec(t) = -1$.
- $vinitiale(t)$ est la valeur initiale de $case(t)$ à l'instant 0.

Question 1,4

Montrer que SPS est P-complet.

Question 2 : programmation linéaire

Soit A une matrice $n \times m$ à coefficients entiers, B un vecteur ligne de dimension n à coefficients entiers, C un vecteur colonne de dimension m à coefficients entiers et k un entier. Le problème RLP de la programmation linéaire rationnelle est l'ensemble des (A, B, C, k) tels qu'il existe un vecteur ligne X à coefficients rationnels positifs ou nuls satisfaisant $AX \leq B$ et $CX \geq 0$. Si on se restreint aux vecteurs X à coordonnées entières on obtient la programmation linéaire entière ILP. On admet que RLP est P et que ILP est NP.

Question 2,1

Montrer que ILP est $NP - complet$.

Question 2,2

Montrer que RLP est $P - complet$.