Modèles de calcul, TD numéro 8
Natacha Portier
jeudi 28 mars 2002

Une suite de circuits $C = (C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est polynomiale uniforme s'il existe une machine de Turing travaillant en espace logarithmique qui sur l'entrée 1^n produit en sortie C_n.

Un langage est $TUPS(f,g)$ s'il est reconnu par une suite de circuits polynomiale uniforme C telle que C_n soit de profondeur $\mathcal{O}(f(n))$ et de taille $\mathcal{O}(g(n))$.

La classe NC est l'union des classes $TUPS(f,g)$ où f est une puissance du logarithme et g un polynôme. La classe NC_i est l'union des classes $TUPS(f,g)$ où $f = \log^i$ et g est un polynôme.

Question 1

Montrer qu'un langage P est reconnu par une suite de circuits de taille polynomiale.

Question 2

Montrer qu'il existe un langage non décidable qui est reconnu par une suite de circuits de taille polynomiale.

Question 3

Montrer qu'il existe un langage qui n'est pas reconnu par une suite de circuits de taille polynomiale.

Question 4

Montrer qu'un langage est reconnu par une suite de circuits polynomiale uniforme si et seulement s'il est P.

Question 5

Le problème $CHEM$ est celui d'accessibilité dans les graphes : étant donné un graphe orienté et deux de ses sommets s_1 et s_2, y a-t-il un chemin de s_1 à s_2 dans le graphe ?

Question 5,1

Trouver une suite de circuits polynomiale uniforme pour $CHEM$ en considérant un circuit dont les portes sont $g_{i,j,k}$ avec $1 \leq i, j \leq n$ et $0 \leq k \leq n$, et $h_{i,j,k}$ avec $1 \leq i, j, k \leq n$, où n est le nombre de sommets du graphe. Intuitivement, $g_{i,j,k}$ vaut 1 s'il existe un chemin du sommet i au sommet j qui n'utilise pas de sommet intermédiaire (autre que i et j) plus grand que k, et $h_{i,j,k}$ vaut 1 s'il existe un chemin du sommet i au sommet j qui n'utilise pas de sommet intermédiaire plus grand que k mais qui utilise k exactement une fois. Donner la taille et la profondeur du circuit.

Question 5,2

Montrer que $CHEM$ est $TUPS(n, n^3)$.

Question 5,3

Donner un circuit qui multiplie deux matrices carrées booléennes de taille n en temps séquentiel $\mathcal{O}(n^3)$ et temps parallèle $\mathcal{O}(1 + \log n)$.

Question 5,4

Montrer que $CHEM$ est $TUPS(\log^2 n, n^3 \log n)$.

Question 6,1

Montrer que si L se réduit par une machine de Turing travaillant en espace logarithmique à un langage L' dans NC alors L est dans NC.

Question 6,2

Montrer que si L se réduit par une machine de Turing travaillant en espace logarithmique à un langage L' dans NC_j et $j \geq 2$ alors L est dans NC_j.

Question 7,1

Montrer que pour tout entier $i > 1$ nous avons $NC_i \subseteq DSPACE(\log^i)$.

Question 7,2

Montrer que $NC \neq PSPACE$.