Probabilités et applications à l'algorithmique
devoir volontaire
Natacha Portier
15-20 mai 2006

1 Graphes aléatoires

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On appelle "triangle de G" un sous-ensemble de $\{x, y, z\}$ de trois sommets distincts de G tel que $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ et $\{z, x\}$ sont tous les trois dans E.

On rappelle que la distance de deux sommets du graphe est la longueur (en nombre d'arêtes) du plus court chemin entre ces sommets (s'il n'existe pas de chemin entre les deux sommets on décide que leur distance est $+\infty$). Le diamètre du graphe est le maximum des distances entre deux sommets du graphe.

Soit $p \in]0, 1[$. On travaille dans le modèle de graphe aléatoire $G(n, p)$.

1. Soient x et y deux sommets distincts. Calculez la probabilité de l'événement suivant:
$$\exists z \ \{z, x\} \in E \wedge \{z, y\} \in E.$$
2. Calculez la probabilité de l'événement:
$$\{x, y\} \text{ est l'un des cotés d'un triangle.}$$
3. Soit E_x l'événement $\exists y \neq x \ \forall z \ \neg(\{z, x\} \in E \wedge \{z, y\} \in E)$. Calculez $\lim_{n \to +\infty} P[E_x]$.
4. En déduire $\lim_{n \to +\infty} P[G(n, p) \text{ contient un triangle}]$.
5. Calculer $\lim_{n \to +\infty} P[\text{ tout sommet de } G(n, p) \text{ est inclus dans un triangle}]$.
6. Calculez l'espérance du nombre de triangles de $G(n, p)$.
7. Calculez $\lim_{n \to +\infty} P[\text{diamètre}(G(n, p)) \leq 2]$ et $\lim_{n \to +\infty} P[\text{diamètre}(G(n, p)) = 2]$.