Probabilités et applications à l'algorithmique, TD 11
Natacha Portier, mardi 23 mai 2006

Question 1 : Marche aléatoire en dimension $k \geq 3$ (pourquoi les cosmonautes ne doivent pas boire de vodka)

Soit $S = \mathbf{Z}^k$ l'espace des états. Le point $y = (x_1, ..., x_{j-1}, x_j \pm 1, x_{j+1}, ..., x_k)$ est dit voisin de $x = (x_1, ..., x_k)$. La probabilité de transition d'un état x à un état voisin y est $p_{xy} = 1/2k$.

Question 1,1

Pour $k = 3$, donner la probabilité P_{2n} de revenir à son point de départ en $2n$ coups.

Question 1,2

Soit c_n le maximum de $n!/(n_1!n_2!n_3!)$ quand n_1, n_2 et n_3 sont des entiers naturels tels que $n_1 + n_2 + n_3 = n$ et soient N_1, N_2 et N_3 les entiers pour lesquels il est réalisé. Montrer que pour tout i compris entre 1 et 3 on a

$$\lfloor n/3 \rfloor \leq N_i \leq \lfloor n/3 \rfloor + 1$$

Question 1,3

Donner la valeur exacte de c_n.

Question 1,4

Montrer que $\displaystyle\sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \frac{1}{3^n} = 1$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n_1+n_2+n_3=n} \left(\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \frac{1}{3^n}\right)^2 \leq \frac{c_n}{3^n}$ et une borne pour P_{2n} dans le cas $k = 3$.

Question 1,5

L'état 0 est-il transitoire ou récurrent dans le cas $k = 3$?

Question 1,6

L'état 0 est-il transitoire ou récurrent pour un entier $k > 3$ quelconque ? On reprendra les questions précédentes dans le cas $k > 3$ quelconque pour y répondre.

Question 2 ; processus de branchement : Galton-Watson

Question 2,1 : somme aléatoire de variables aléatoires i.i.d.
Soit $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières et dont la fonction génératrice est g_Y. Soit T une variable aléatoire à valeurs entières indépendante des $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ et de fonction génératrice g_T. Calculer la fonction génératrice de :

$$X = \sum_{n=1}^{T} Y_n$$

En déduire l'espérance de X en fonction de celles de T et des Y_n.

Question 2,2 : Graphe d'une fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Soit $g : [0;1] \to \mathbf{R}$ un fonction définie par $g(x) = E[x^X]$.

Question 2,3

Montrer que g est croissante et convexe. Montrer en outre que si $P(X = 0) < 1$ alors g est strictement croissante et si $P(X \leq 1) < 1$ alors g est strictement convexe.

Question 2,4

Supposons $P(X \leq 1) < 1$. Montrer que si $E[X] \leq 1$ alors l'équation $g(x) = x$ a pour unique solution 1 dans $[0;1]$. Montrer que si $E[X] > 1$ alors l'équation a deux solutions dans $[0;1]$: $x = 1$ et $x = x_0 \in]0;1[$.

Question 2,5 : cas général

Soit $\{Z_n^{(j)}\}_{n\geq 1, j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières de foncttion génératrice g. Soit $Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, \dots)$ et X_n les variables définies par $X_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante :

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^k$$

Calculer la fonction génératrice du nombre X_n d'individus de la génération n et discuter de la probabilité d'extinction.

Question 2,6 : pourquoi la loi vient de changer

On suppose le nombre d'enfants mâles par homme dans la population française donné par la fonction génératrice suivante : $g_Z(x) = 0,3 + 0,5x + 0,18x^2 + 0,02x^3$ Quelle est la probabilité d'extinction d'un nom de famille issu d'un ancêtre commun ?