Probabilités et applications à l'algorithmique, TD numéro 4
Natacha Portier
lundi 25 février 2002

Définitions : distributions de probabilités discrètes

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble dénombrable et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Une application X de Ω dans $\mathcal{X}$ est une **variable aléatoire** si $\{X = x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Une fonction p de $\mathcal{X}$ dans $[0; 1]$ est une **distribution de probabilité** si

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$$

La distribution de probabilité de la variable aléatoire X est p si pour tout $x \in \mathcal{X}$ on a $p(x) = P(X = x)$.

La variable aléatoire X est un **vecteur de Bernouilli d'ordre** n **et de paramètre** p si : $p \in [0; 1]$ et $X = (X_1, ..., X_n) \in \{0; 1\}^n$ a la distribution de probabilité $p(x) = p^{h(x)}(1-p)^{n-h(x)}$ où $h(x)$ est le poids de Hamming de x :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Cela correspond à une suite de n lancers indépendants d'une pièce.

Si $\mathcal{X} = \mathbf{N}$ alors X est une **variable aléatoire de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si sa distribution de probabilité p vérifie :

$$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \ (k \geq 0)$$

Si $\mathcal{X} = \{0; 1; \cdots; n\}$ la distribution définie par

$$p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ (0 \leq k \leq n)$$

où $p \in [0; 1]$ est la **distribution binomiale** $B(n; p)$ **d'ordre** n **et de paramètre** p.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathcal{X}$ et de distribution p et soit une application $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathrm{R}}$. Si f est à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}_+$ alors par définition $E[f(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)p(x)$. Si f est à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ on définit $f^+(x) = max(0, f(x))$ et $f^-(x) = max(0, -f(x))$. On a $E[|f|] = E[f^+] + E[f^-]$. Si cette quantité est finie alors on dit que f est intégrable. Si $E[f^+]$ et $E[f^-]$ ne sont pas tous les deux infinis alors on dit que f est sommable et $E[f] = E[f^+] - E[f^-]$. Sinon $E[f]$ n'est pas définie et f n'est ni sommable ni intégrable.

Si la variable aléatoire X est intégrable alors sa moyenne est $m_X = E[X]$ et sa **variance** est $V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2$. Sa racine carrée positive σ_X est appelée **écart-type** de X.

Question 1 : de la nécessité de la convergence commutative

On considère la série harmonique alternée de terme général $u_n = (-1)^{n+1}/n$ ($n \geq 1$) et la fonction σ de l'ensemble des entiers strictement positifs telle que $\sigma(3k+1) = 2k+1$, $\sigma(3k+2) = 4k+2$ et $\sigma(3k+3) = 4k+4$. Montrer que σ est une permutation. Que peut-on dire des limites éventuelles des séries de terme général u_n et $u_{\sigma(n)}$? Comment réarranger les termes pour obtenir une série divergente ? Soit l un réel quelconque. Comment obtenir une série qui converge vers l ?

Question 2

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire de Bernouilli et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Quelle est la loi de S_n ?

Question 3

Calculer la moyenne et la variance de la distribution de Poisson. Calculer la moyenne et la variance de la distribution binomiale d'ordre n et de paramètre p.

Question 4

Les chasseurs tuent en moyenne 5 vaches par an. Le nombre de ces vaches prises pour des lapins suit une loi de Poisson. Calculer la probabilité pour qu'il ne dépasse pas 7. Quelle est la probabilité d'avoir une année sans victime ?

Question 5 : estimateurs de la moyenne et de la variance

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de même espérance m et de même variance $\sigma^2 > 0$.

Question 5,1 : moyenne empirique

On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n X_i$. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$. Pourquoi appelle-t-on $\overline{X_n}$ la moyenne empirique ?

Question 5,2

On pose $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$. Calculer l'espérance de S_n^2. Quel est l'intérêt de cette variable ? Que dire de sa variance ?

Question 6 : convergence en loi et le théorème des événements rares de Poisson

On considère une masse donnée d'uranium 238 comprenant des milliards d'atomes (n) et on cherche à calculer la loi du nombre Y de noyaux d'Hélium (rayonnement α) émis pendant un certain laps de temps que l'on prend assez court. On peut alors supposer que chaque noyau émet indépendemment des autres et que pendant ce laps de temps soit il n'émet rien avec une probabilité $1-p_n$ soit il émet un noyau avec la probabilité p_n.

Donner la loi et la moyenne de $Y = S_n$.

On observe $E[Y] = \lambda$. Montrer que S_n converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson dont on donnera le paramètre.

Définition : Une suite (Y_n) converge en loi vers la variable Y si

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq x) = P(Y \leq x)$$

pour tout point de continuité de la fonction $x \to P(Y \leq x)$. Dans le cas où les Y_n et Y ne prennent que des valeurs entières positives cela revient à dire que $lim_{n\to+\infty} P(Y_n = k) = P(Y = k)$ pour tout $k \geq 0$.

Remarque : Poisson s'est posé la question suivante : soit Y une variable aléatoire dont on sait qu'elle est la somme d'un nombre n très grand de variables aléatoires de Bernouilli i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées). La seule donnée expérimentale étant la moyenne λ de Y, quel n choisir ? Dans l'exemple précédent, pour éviter de faire ce choix, on fait l'approximation $n = +\infty$.