Probabilités et applications à l'algorithmique, TD numéro 5
Natacha Portier
mercredi 21 mars 2001

Question 1 : convergence en loi et le théorème des événements rares de Poisson

On considère une masse donnée d'uranium 238 comprenant des milliards d'atomes (n) et on cherche à calculer la loi du nombre Y de noyaux d'Hélium (rayonnement α) émis pendant un certain laps de temps que l'on prend assez court. On peut alors supposer que chaque noyau émet indépendemment des autres et que pendant ce laps de temps soit il n'émet rien avec une probabilité $1-p_n$ soit il émet un noyau avec la probabilité p_n.

Donner la loi et la moyenne de $Y = S_n$.

On observe $E[Y] = \lambda$. Montrer que S_n converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson dont on donnera le paramètre.

Définition : Une suite (Y_n) converge en loi vers la variable Y si

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = P(Y \leq x)$$

pour tout point de continuité de la fonction $x \to P(Y \leq x)$. Dans le cas où les Y_n et Y ne prennent que des valeurs entières positives cela revient à dire que pour $lim_{n \to +\infty} P(Y_n = k) = P(Y = k)$ pour tout $k \geq 0$.

Remarque : Poisson s'est posé la question suivante : soit Y une variable aléatoire dont on sait qu'elle est la somme d'un nombre n très grand de variables aléatoires de Bernouilli i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées). La seule donnée expérimentale étant la moyenne λ de Y, quel n choisir ? Dans l'exemple précédent, pour éviter de faire ce choix, on fait l'approximation $n = +\infty$.

Question 2 : Inégalité de Jensen

Soit Φ une fonction convexe définie sur un intervalle de R contenant toutes les valeurs d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans R. Supposons que X et $\Phi(X)$ sont intégrables. Montrer que :

$$\Phi(E[X]) \leq E[\Phi(X)]$$

Question 3 : Approximation polynomiale de Bernstein

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans R. Le polynôme de Bernstein associé est défini par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Nous allons montrer la suite des P_n converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

Question 3,1

Pour chaque $x \in [0;1]$ on introduit une suite $(X_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $P(X_n = 1) = x$ et $P(X_n = 0) = 1 - x$. Donner la distribution de $S_n = X_1 + ... + X_n$. Calculer $E[f(S_n/n)]$.

Question 3,2

Borner $|P_n(x) - f(x)|$ en utilisant Tchebychev. Conclure.

Question 4 : l'aiguille de Buffon

Une ligne rigide est jetée au hasard sur un réseau de droites parallèles équidistantes de a. Nous allons calculer le nombre moyen de points d'intersection de la ligne et du réseau.

Les lignes du réseau sont appelées L_i où i est un entier relatif. On suppose la courbe posée sur un plan dont A et B sont des points distincts. Pour poser la courbe ¡¡au hasard¿¿ sur le réseau on commence par poser A entre L_0 et L_1 uniformément relativement à la distance à L_0 puis on choisit $\overrightarrow{AB}$ en choisissant au hasard de manière uniforme la valeur de l'angle qu'il fait avec les lignes.

Question 4,1

Trouver une courbe qui a toujours le meme nombre de points d'intersection avec le réseau.

Question 4,2

Montrer que le nombre moyen de points d'intersection d'une aiguille de longueur l avec le réseau est proportionnel à l.

Question 4,3

La courbe C est approximée par une ligne brisée $P_n = M_0...M_n$ dont les sommets sont répartis uniformément sur la courbe. On note $N(C)$ (resp. $N(P_n)$) le nombre de points d'intersection de C (resp. de P_n) avec le réseau. On suppose que C est rectifiable et on admet que $E[N(P_n)]$ tend vers $E[N(C)]$.

Calculer $E[N(C)]$.

Question 5

Figaro a deux coiffeuses, Rose et Marie. Le nombre de clientes de Rose et le nombre de clientes de Marie sont indépendants et suivent une loi de Poisson de moyennes respectives λ et μ.

Question 5,1

Calculer le nombre moyen de clientes au total.

Question 5,2

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre total de clientes.

Question 5,3

Sachant qu'il y a n clientes calculer la probabilité pour que Rose en ait k.

Question 6

A Bagdad la situation est grave. Le rusé Iznogoud, qui cumule les mandats de grand vizir et de ministre aux harems, est inquiet : il nait environ 105 garçons pour 100 filles et il est de plus en plus difficile de se constituer un harem. Il propose donc au khalife d'interdire aux familles d'avoir encore des enfants après la naissance de leur premier fils. Ainsi il y aura plus de filles que de garçons dans la plupart des familles. Que lui répond l'avisé khalife Hâroun al-Rachid ?