Probabilités et applications à l'algorithmique
TD numéro 8 : séries génératrices
Natacha Portier
lundi 25 mars 2002

Question 1 : rappels mathématiques

Qu'est-ce qu'une série entière ? Qu'est-ce que le rayon de convergence ? Que peut-on dire de série sur la frontière du disque ouvert de convergence ? Comment peut-on calculer le rayon de convergence ? Quand et comment calculer la dérivée d'une série entière ? Quel est son rayon de convergence ?

Question 2 : principale définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. La fonction génératrice de probabilité de X est la fonction G_X définie par $G_X(z) = E(z^X)$. Calculer $G_X(1)$. Quel est le rayon de convergence de G_X ? Comment calculer les moments d'ordre 1 et 2 de X s'ils existent ? Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices G_X et G_Y. Calculer la fonction génératrice de $X + Y$. Quel est son rayon de vonvergence ?

Question 3 : loi géométrique

Calculer la fonction génératrice de la loi géométrique de paramètre p. En déduire sa moyenne et sa variance.

Question 4 : binomiale et Poisson

Question 4,1

Soit X_1 une v.a. de loi binomiale de paramètres $n \geq 2$ et $p \in [0; 1]$. Calculer la fonction génératrice G_1 de X_1. En déduire $E(X_1)$ et $Var(X_1)$.

Question 4,2

Soit X_1 et Y_1 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives binomiales $B(n, p)$ et $B(m, p)$. Donner la loi de probabilité de $X_1 + Y_1$.

Question 4,3

Soit X_2 une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer la fonction génératrice G_2 de X_2. En déduire $E(X_2)$ et $Var(X_2)$.

Question 4,4

Soit X_2 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives de Poisson $P(\lambda)$ et $P(\mu)$. Donner la loi de probabilité de $X_2 + Y_2$.

Question 4,5

On suppose que $n \to \infty$ et $p \to 0$ de façon que $np \to \lambda$. Montrer que pour tout $s \in$ R, $G_1(s) \to G_2(s)$.

Question 4,6

Supposons qu'à la sortie d'une usine de fabrication automobile chaque véhicule ait une chance sur 10000 de comporter un pare-brise défectueux, et ceci indépendemment de la fabrication des autres véhicules ; quelle est la probabilité qu'un parc de 10000 voitures comprennent au moins une voiture au pare brise défectueux ?

Question 5 : dés truqués

Question 5,1
On jette deux dés indépendants non pipés. En utilisant les fonctions génératrices, calculer la probabilité pour que la somme des points obtenue soit égale à un entier donné k. Représenter graphiquement (k, P(S=k)) et montrer que c'est sur un triangle.

Question 5,2
Peut-on truquer deux dés indépendemment de façon que la somme des points obtenue en les lançant soit équirépartie ?