

### Question 1 : rappels mathématiques

Qu'est-ce qu'une série entière? Qu'est-ce que le rayon de convergence? Que peut-on dire de série sur la frontière du disque ouvert de convergence? Comment peut-on calculer le rayon de convergence? Quand et comment calculer la dérivée d'une série entière? Quel est son rayon de convergence?

### Question 2 : principale définition

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$ . La fonction génératrice de probabilité de  $X$  est la fonction  $G_X$  définie par  $G_X(z) = E(z^X)$ . Montrer que c'est une série entière. Calculer  $G_X(1)$ . Quel est le rayon de convergence de  $G_X$ ? Comment calculer les moments d'ordre 1 et 2 de  $X$  s'ils existent? Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices  $G_X$  et  $G_Y$ . Calculer la fonction génératrice de  $X + Y$ . Quel est son rayon de convergence?

### Question 3 : loi géométrique

Calculer la fonction génératrice de la loi géométrique de paramètre  $p$ . En déduire sa moyenne et sa variance.

### Question 4 : binomiale et Poisson

#### Question 4,1

Soit  $X_1$  une v.a. de loi binomiale de paramètres  $n \geq 2$  et  $p \in [0; 1]$ . Calculer la fonction génératrice  $G_1$  de  $X_1$ . En déduire  $E(X_1)$  et  $Var(X_1)$ .

#### Question 4,2

Soit  $X_1$  et  $Y_1$  deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives binomiales  $B(n, p)$  et  $B(m, p)$ . Donner la loi de probabilité de  $X_1 + Y_1$ .

**Question 4,3**

Soit  $X_2$  une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Calculer la fonction génératrice  $G_2$  de  $X_2$ . En déduire  $E(X_2)$  et  $Var(X_2)$ .

**Question 4,4**

Soit  $X_2$  et  $Y_2$  deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives de Poisson  $P(\lambda)$  et  $P(\mu)$ . Donner la loi de probabilité de  $X_2 + Y_2$ .

**Question 4,5**

On suppose que  $n \rightarrow \infty$  et  $p \rightarrow 0$  de façon que  $np \rightarrow \lambda$ . Montrer que pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $G_1(s) \rightarrow G_2(s)$ .

**Question 4,6**

Supposons qu'à la sortie d'une usine de fabrication automobile chaque véhicule ait une chance sur 10000 de comporter un pare-brise défectueux, et ceci indépendamment de la fabrication des autres véhicules; quelle est la probabilité qu'un parc de 10000 voitures comprennent au moins une voiture au pare brise défectueux?

**Question 5 : dés truqués****Question 5,1**

On jette deux dés indépendants non pipés. En utilisant les fonctions génératrices, calculer la probabilité pour que la somme des points obtenue soit égale à un entier donné  $k$ . Représenter graphiquement  $(k, P(S=k))$  et montrer que c'est sur un triangle.

**Question 5,2**

Peut-on truquer deux dés indépendamment de façon que la somme des points obtenue en les lançant soit équirépartie?