Probabilités et applications à l'algorithmique, TD numéro 9
Natacha Portier
lundi 15 avril 2002

Question 1 : bruit qui court

Les notes de cours seront-elles autorisées à l'examen ? La réponse est transmise à travers n intermédiaires. On suppose que chaque étudiant transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme en son contraire avec probabilité $1 - p$; les intermédiaires sont indépendants.

Modéliser cette situation par une chaîne de Markov a deux états et calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale. Que se passe-t-il quand $n \to \infty$?

Question 2 : joyeuses pâques

La nouvelle série de figurines ¡¡castors chinois¿¿ présentes dans les oeufs en chocolat comporte 4 personnages différents. On note T le nombre d'oeufs à acheter pour obtenir la collection complète.

Question 2,1

Représenter le processus par une chaine de Markov.

Question 2,2

Établir la matrice de transition. Calculer le vecteur de la distribution de probabilité à la troisième transition.

Question 2,3

Calculer l'espérance et la variance de T.

Question 3 : Le Bon, la Brute et le Truand

Le Bon, la Brute et le Truand règlent leurs comptes dans le cimetière. Ils sont prêts à dégainer, chacun contre les autres. Le Bon est sûr d'atteindre sa cible, le Truand a huit chances sur dix alors que la Brute, qui a le soleil dans les yeux, a une chance sur deux. Ils tirent à tour de rôle dans un ordre fixe déterminé par le hasard au début du duel. Chacun tire sur celui qui présente le plus de danger. le ¡¡duel¿¿ cesse lorsqu'il n'y a plus qu'un seul survivant.

Question 3,1

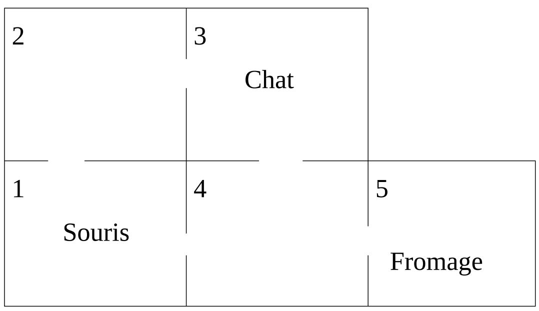
Représenter le processus par une chaîne de Markov.

Question 3,2

Calculer la probabilité de survie de chaque protagoniste.

Question 4 : le chat qui mange la souris qui mange le fromage

Si à l'instant t la souris est dans une pièce avec k portes alors au temps suivant $t+1$ elle se trouve équiprobablement dans une des k pièces voisines. Si elle se trouve dans la pièce du fromage elle le mange. Le chat est assez pareseux pour ne pas bouger de sa chambre mais assez gourmand pour manger la souris dès qu'il se retrouve dans la meme pièce qu'elle. Partant de la configuration suivante quelle est la probabilité que la souris mange le fromage ?



Question 5 : un jeu de tennis

On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. C'est à Olivier de servir. Il gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité d'Olivier de gagner le jeu.